This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

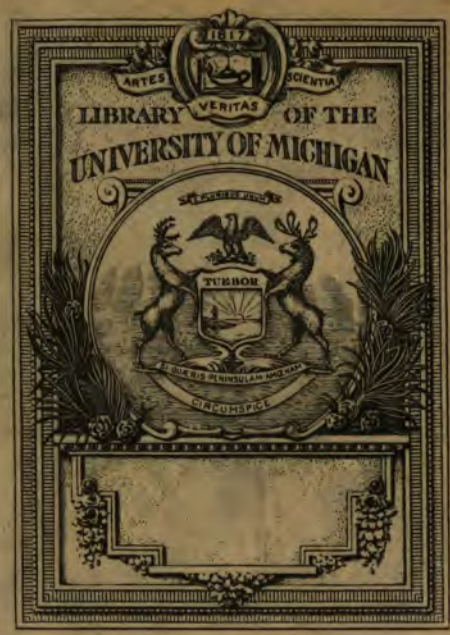
+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

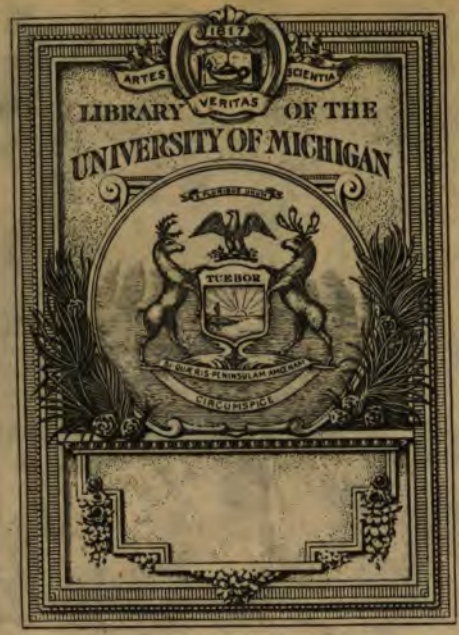
Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

512.


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

512.


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
215
.E567

RESOLUCION GENERAL

DE LAS

ECUACIONES NUMÉRICAS.

RESOLUCION GENERAL

DE LAS

ECUACIONES NUMÉRICAS

POR

EL MÉTODO DE GRÄFFE.

MEMORIA

ESCRITA EN ALEMAN

POR J. F. ENCKE,

traducida libremente al castellano

POR D. MIGUEL MERINO.

MADRID:

IMPRENTA DE LA V. É H. DE D. E. AGUADO.

Calle de Pontejos, núm. 8.

1879.

Hist. of Sci
Venezuela
10-9-41
44074

PRELIMINARES.

Los problemas que pueden proponerse sobre la *cantidad*, especialmente *discontínua*, presentan dos dificultades de muy distinta índole: de exacta comprension y sentido, una; y de resolucion, propiamente dicha, otra. La perspicacia y experiencia del matemático calculador vencen la primera: para eludir ó dominar la segunda, pídense al Álgebra reglas precisas y terminantes, ó procedimientos seguros, directos y de fácil ejecucion, aplicables en todos los casos.—¿Los posee en realidad?

Planteado ya ó escrito un problema en lenguaje matemático, podemos suponerle transformado en ecuacion, y la anterior pregunta vale tanto como esta otra: ¿hay alguna regla ó procedimiento, directo y eficaz, para resolver las ecuaciones?—Distingamos.

Si las ecuaciones son *propiamente algebráicas*, ó representa cada una la forma general de cuantas de su mismo *grado* pueden proponerse, los procedimientos de análisis general y completos se limitan á las de los cuatro primeros grados: á las de *primero* y *segundo*, resolubles desde muy remotos tiempos; y de *tercero* y *cuarto*, en cuyo estudio y descomposicion ejercitaron con gran fortuna su peregrino ingenio los italianos Ferreo, Tartalea y Cardan, y el discípulo de éste, Luis Ferrari, en la primera mitad del siglo XVI; y otros matemáticos de mayor importancia y fama todavía, en épocas posteriores.

Pero si las ecuaciones son *numéricas*, ó corresponden, no al problema general de cierto grado, sino á cualquiera de los infinitos problemas particulares, en cada uno de los generales comprendido, el asunto varía de aspecto, y la posibilidad de

la solucion no se halla limitada ó circunscrita á los cuatro primeros y más sencillos casos.

De esta distincion un poco sutil, y como dolorosa confesion de impotencia científica, resulta que el Álgebra no posee en realidad método alguno, directo y general, para resolver las ecuaciones, cuyo análisis y estudio, en todos conceptos y bajo de todos los aspectos imaginables, constituyen la esencia de aquella importantísima rama de las Matemáticas. Tan no le posee, que ni las reglas de Cardan y de Ferrari son aplicables, sin grave dificultad, á la resolucion de las ecuaciones de tercero y de cuarto grado: en pasando de las de segundo, que ya el griego Diofanto resolvia, el problema, atacado por cien distintos puntos á la vez, y minado y socavado durante siglos, aguanta todavía el empuje tremendo de la perspicacia y curiosidad, sobreexcitadas por tan tenaz resistencia, de multitud de sabios, empeñados sin tregua ni descanso en derrumbarle. En algunos momentos parece, sí, que vacila y se desmorona; y por algunos sitios diríase tambien que amenaza inminente y completa ruina: pero, en conjunto, la inmensa mole continúa gravitando sin conmoverse sobre el pobre entendimiento humano, y aplastándole con la irresistible pesadumbre de los misterios y dificultades que encierra.

No hay medio de descifrar el enigma en plena generalidad considerado: no le hay de resolver las ecuaciones algebráicas, ó de formular las relaciones de dependencia necesaria, existentes entre el valor ó la expresion de una cualquiera de sus raices y los coeficientes literales de los diversos términos de aquellas ecuaciones.—¿Y cuándo estas son *numéricas*, ó sus coeficientes son números, con antelacion determinados, ó de valor conocido y concreto?

Entónces ya hemos dicho que la posibilidad de resolverlas no se limita á los *dos* ni á los *cuatro* primeros grados; mas la *posibilidad* no incluye la *facilidad*, constante seguridad y prontitud de la solucion. Posible es, en efecto, resolver las *ecuaciones numéricas* de todos los grados, y suplir en la práctica el defecto ó ineficacia de la teoría; pero con trabajo sumo y enorme gasto, y áun desperdicio, de tiempo y de paciencia muchas veces.

El matemático frances Vieta y el inglés Harriot, creadores del Álgebra moderna, comenzaron á considerar la cuestion bajo este aspecto, y sentaron las bases para irla dilucidando poco á poco, en la segunda mitad del siglo XVI y principios del XVII.—Descartes fijó en ella la atencion; y, como en todo cuanto puso la mano y clavó la mirada, dejó impresa tambien aquí la huella indeleble de su ingenio.—Newton se paró tambien ante la dificultad que á sus predecesores habia detenido; y á Newton no era fácil que se le opusiese obstáculo alguno intelectual, que sin extraordinario esfuerzo no conmoviese y atropellase.—Pues por donde Newton y Descartes habian ya pasado, pasó mas tarde Lagrange, como si todavía hubiera por allí nuevo campo que explorar: alguna region, perdida en las tinieblas de la ignorancia ó del error, que alumbrar con los esplendorosos rayos de su soberana inteligencia.—Y Fourier y Sturm, aleccionados por la experiencia, ricos con el saber heredado, y posesores de gran talento, volvieron, en nuestros dias casi, á emprender la misma tarea de investigacion y análisis en que Lagrange habia ejercitado las, al parecer, irresistibles facultades de su espíritu.

¿Cuáles han sido los resultados de tantos afanes y fatigas: de tan reiterados y colosales esfuerzos como los que debieron hacer, para resolver el mismo problema siempre, aquellos celebérrimos matemáticos, y otros muchísimos, poco menos notables, secuaces ó adversarios suyos, y cuya simple enumeracion llenaria algunas páginas? ¿Ni Descartes, ni Newton, ni Leibnitz, ni la muchedumbre de sus discípulos; ni Lagrange, ni D'Alembert, ni Budan, ni Fourier, ni Cauchy, ni Sturm; ni tantos y tantos otros analistas de primera fuerza, auxiliados por verdaderas legiones de trabajadores inteligentes é infatigables de segundo órden, habrán logrado resolver el problema planteado por Harriot y Vieta? ¿Habrán sido de todo punto estériles los alardes de ingenio verificados á porfía con tal objeto, durante el siglo XVII, y el XVIII, y lo que va del XIX: los tres siglos batalladores por excelencia, como de ebullicion tumultuosa del cerebro humano, y de frenesí por saberlo, descifrarlo y explicarlo todo?

Estériles por completo de ningun modo; por cuanto, mer-

ced á los ensayos y esfuerzos intelectuales aludidos, la ciencia se ha enriquecido con gran número de verdades: sorprendentes por su originalidad, unas; fecundas en aplicaciones útiles, otras; y dignas de profunda meditacion por la trascendencia que encierran, todas. Nada más admirable que el cuerpo de doctrina, así poco á poco constituido y denominado *Teoría general de las Ecuaciones:* ningun estudio más entretenido y provechoso para el entendimiento que su estudio: hasta la vanidad del hombre encuentra en él sobrados motivos para prendarse de sí misma, si á la vanidad acompaña el pensamiento ó el recuerdo de que hombres han sido tambien los que inventaron y crearon tan peregrina *teoría.* Concerniente á las ecuaciones, casi se sabe cuanto puede saberse: todo, ménos resolverlas!

Demostremos la exactitud de esto último con las palabras de algunos sábios de autoridad irrecusable.

De una plumada derriba Lagrange, en el prólogo de su célebre *Tratado de la Resolucion de las Ecuaciones numéricas,* el edificio levantado por los analistas que le habian precedido, negando que el problema final haya sido rigorosamente resuelto por nadie, ántes de su época. «El método que ahora (1767) propongo, nos dice, es el único directo y seguro para descubrir ó *separar* las raices, tanto reales como imaginarias, de una ecuacion numérica cualquiera, y para determinar *rápidamente* y con aproximacion indefinida los valores de aquellas raices.»

Pues en la segunda parte de su libro titulado: *De los métodos en las Ciencias de raciocinio puro (Des méthodes dans les Sciences de raisonnement,* 1866), el sensato y respetable Duhamel aprecia el método de Lagrange en estos ú otros equivalentes términos:

«El procedimiento propuesto por Lagrange para separar unas de otras ó *aislar* las *raices reales* de una ecuacion numérica, *es irreprochable en teoría,* é inapreciable por su rigor y elegancia en el concepto científico. Pero, *en la práctica,* la formacion preliminar de la ecuacion cuyas raices representan las diferencias de las raices de la ecuacion primitiva, ó los cuadrados de estas diferencias, *es por extremo laboriosa,* tanto

que por diversos artificios se procura esquivarla con frecuencia. Mas lo que en el campo de las aplicaciones suele ganarse entónces, piérdese en el concepto teórico apelando á tales subterfugios, ó abandonando el camino directo trazado por Lagrange.»

Y el juicio de Duhamel es el de todos los matemáticos que han escrito sin pasion, ni compromiso de ningun género, sobre este mismo asunto. Por el procedimiento de Lagrange no admite duda que pueden resolverse las ecuaciones numéricas: lo dudoso es que alguien las resuelva: lo cierto que todo el mundo rehuye, con sobrado motivo y como por instinto, el penoso trabajo de su resolucion.

Si Fourier no adelanta más en teoría que Lagrange, cuídase más que este último de las dificultades de ejecucion ó prácticas. Duhamel, sin embargo, le trata hasta con dureza, segun á renglon seguido puede verse.

«Fourier, continua diciendo el crítico citado, ideó procedimientos generales muy sencillos para descubrir si dos números dados comprenden ó no alguna raiz de la ecuacion propuesta, ó, con mayor propiedad, las raices que *pueden á lo sumo* comprender, *no las que comprenden* con toda seguridad.....

»Para verificar la separacion de las raices que pueden hallarse comprendidas entre aquellos números, el mismo célebre analista propuso un procedimiento de *fácil desempeño*, pero *poco satisfactorio en teoría*. Y, ya separadas, el método que recomienda para determinar sus valores aproximados, *tampoco está exento de tanteos ó ensayos é incertidumbres* de varios géneros.....

»El importante teorema de Fourier (ó de Budan) concerniente al número de raices reales que *pueden* hallarse comprendidas entre dos números determinados, *es de aplicacion muy sencilla*, y comprende, como caso particular, la célebre *regla de los signos*, descubierta por Descartes. Pero, ni más ni ménos que esta regla, presenta aquel teorema el inconveniente de hacernos creer en la existencia de raices reales, de que, sin embargo, la ecuacion carece, obligándonos ó induciéndonos á verificar numerosos cálculos hasta persuadirnos de que, efectivamente, no existen semejantes raices.....»

Completa Sturm la obra de Fourier, y adquiere así grande y merecida fama de habilísimo matemático. Pues Duhamel, repitiendo como el eco la opinion de otros sabios, continúa diciendo:

«Sturm, que no solo conocia las *Memorias* publicadas por Fourier, sino todos sus trabajos originales y ensayos manuscritos, se propuso averiguar la causa que, hasta cierto punto, habia esterilizado los esfuerzos de su ilustre maestro para resolver el importante problema de la separacion y determinacion de las raices de las ecuaciones numéricas. Y, despues de averiguada, reemplazando las *funciones derivadas* de Fourier por otros polinomios muy diferentes, aunque tambien relacionados con la ecuacion propuesta, é imitando, como él mismo ingénuamente confiesa, el órden de investigacion y demostracion de su predecesor, logró descubrir el célebre teorema de su nombre, por medio del cual, *sin ambigüedad ó indeterminacion de ninguna especie,* se puede averiguar el número de raices reales que la ecuacion posee, comprendidas entre dos números ó límites determinados; y, por lo tanto, deducir paso á paso los valores de estas raices, con aproximacion á la verdad indefinida.

»Por desgracia, *la aplicacion de este teorema no es tan sencilla y breve como la del de Fourier, y demanda un trabajo de cálculo muy penoso,* y expuesto á frecuentes errores ó equivocaciones materiales. Por consideraciones particulares puede muchas veces aminorarse ó eludirse este trabajo; pero tales consideraciones y artificios no á todos los calculadores ocurren; y, *para que un procedimiento de investigacion sea verdaderamente recomendable y plausible, menester es que todo el mundo pueda emplearle con la misma esperanza y hasta con la misma certidumbre de buen éxito.....*

»La aplicacion del teorema de Sturm *puede exigir muchos ensayos* infructuosos, si la ecuacion contiene raices cuyas diferencias recíprocas sean muy pequeñas; pero tambien los exigiria entónces el procedimiento de Lagrange, que, si prescindimos del auxilio del de Sturm, nos inducirá á verificar tanteos innumerables, allí donde ni esperanza deberíamos abrigar de que pudieran existir raices reales.»

En ménos palabras que Duhamel, y con mayor elocuencia todavía, resume el poco satisfactorio estado de la cuestion que examinamos el filósofo Bordas-Démoulin. En su célebre libro, titulado *El Cartesianismo*, reimpreso en 1874, páginas 375 y 376, se expresa como sigue:

«La *regla de los signos* de Descartes, con sus ventajas é inconvenientes, ha sido durante dos siglos lo mejor que en su especie se ha conocido. Los más notables analistas, desde Newton á Lagrange, no consiguieron dar un paso decisivo en el camino ya explorado y recorrido por Descartes, por más esfuerzos que para conseguirlo hicieron. La ecuacion de los *cuadrados de las diferencias*, propuesta por el segundo de aquellos matemáticos, sencilla en teoría, demanda en las aplicaciones multitud de cálculos fatigosos, y algunas veces interminables casi. Fourier publicó en 1820 una regla descubierta por él años ántes, y con auxilio de la cual casi tocó en la codiciada meta. Y Sturm, estimulado por las mismas enérgicas, aunque infructuosas, tentativas de Fourier, descubrió un nuevo teorema que publicó en 1829, y que realiza el ideal de su maestro. La aplicacion de este teorema solo demanda la formacion sencillísima de una *derivada*, y una operacion análoga á la de investigar el máximo comun divisor de esta derivada y de la funcion ó ecuacion primitiva de donde procede. Y, sin embargo, *el alma abriga cierto misterioso presentimiento de que, para llegar al deseado término, existe algun otro camino más breve y expedito que el desbrozado y franqueado por Fourier y por Sturm.*»

Con lo que precede nada nuevo hemos dicho, de seguro, á cuantos conozcan alguno de los modernos *Tratados de Álgebra*, publicados en Francia para uso de los españoles: á la mayoría, si no totalidad, de nuestros muy contados lectores. Repasando las páginas de los libros de Bourdon, Lefebure de Fourcy, Cirodde, Bertrand, Serret, y de tantos y tantos otros, verdaderamente distintos por las portadas y los nombres de sus autores respectivos, en todos encontramos narrada la misma lamentable historia: la *regla de los signos* de Descartes, y los teoremas de Budan ó de Fourier para determinar el número máximo de las raices reales de una ecuacion, y su dis-

tribucion probable en positivas y negativas; la regla de Newton para deducir los valores de estas raices, ó las correcciones que deben aplicarse á los valores aproximados de las mismas, por meros tanteos y repetidos ensayos ó probaturas, préviamente obtenidos; el método *impracticable* de Lagrange para resolver el mismo problema; y el ingenioso teorema de Sturm, poco ménos impracticable muchas veces, como complemento y coronacion de los demás teoremas y métodos de investigacion análogos ó enderezados al propio objeto.

Se nos olvidaba: á los enumerados hay que agregar, para separar y determinar las raices de las ecuaciones, otro método, basado en la teoría y cálculo de las *diferencias finitas* y fórmulas consiguientes de *interpolacion*, muy difundido en la actualidad y encomiado por diversos autores ó traductores de Álgebra; pero del cual, en el tomo I de su excelente *Manual de los candidatos á la Escuela Politécnica*, dice E. Catalan, despues de exponerle, cediendo en esto á la costumbre adquirida ó á la necesidad para vender el libro, lo que sigue:

«Raro será que por el procedimiento explicado, y del cual hemos hecho dos distintas aplicaciones, podamos verificar, en general, la separacion de las raices reales inconmensurables de una ecuacion cualquiera, *ni áun determinar el número de raices de esta especie que la ecuacion contiene.* Porque, en la mayoría de los casos, el número de *variaciones* que advirtamos en las séries de valores particulares de $f(x)$ será inferior al límite del número de raices que la regla de los signos indique; y si bien es cierto que atribuyendo á x valores en progresion, cuya diferencia constante sea por de pronto 0.1, y sucesivamente despues 0.01, 0.001, etc., etc., la *probabilidad* de que las raices resulten separadas aumenta con cada *serie de sustituciones*, tambien lo es que los cálculos necesarios para esto lo serán de *prolijidad excesiva;* y que si la ecuacion posee raices imaginarias, no reveladas por el teorema de Descartes, aquellos cálculos y tentativas de exploracion deberán prolongarse *indefinidamente*, sin más resultado final que el de perder lastimosamente el tiempo.

»Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0,$$

que solo *puede tener* raices reales entre los límites 0 y $^1/_3$.

»Como *en realidad* no contiene ninguna, si por algun otro procedimiento no lo hubiésemos averiguado con antelacion, y nos empeñásemos en separar las raices por el método indicado, atribuyendo á x los valores sucesivos, $0, 0^5.1, 0^5.2, 0^5.3$..... hasta 0,333333, hallaríase que las 333333 sustituciones producían otros tantos resultados, todos positivos.—Basta con esto para comprender cuál es el valor ó la importancia científica del procedimiento calificado por los autores del *Programa oficial* con el nombre de *Método de las Diferencias.*»

En suma: nada ó poco más de nada. Tal es la consecuencia que se deduce de los párrafos entresacados de las obras de Bordas-Démoulin, Duhamel y Catalan, á los cuales podríamos agregar otros muchos redactados en igual sentido, y procedentes de distintos autores: tal la conviccion que, sin auxilio extraño ni influencia moral externa, adquirimos estudiando el Álgebra por los libros más en boga, y puestos como inmejorables en manos de la juventud estudiosa, concurrente á nuestras aulas de Matemáticas. Con mucho talento, mucha experiencia y destreza en el cálculo, y extensos conocimientos de Álgebra y áun de Geometría, no es imposible, ni desmesuradamente fatigoso, resolver algunas ecuaciones de tercero y cuarto grado, y áun de los grados superiores. Pero el procedimiento que Duhamel reclamaba, «verdaderamente recomendable y plausible, y por todo el mundo practicable con la misma esperanza y hasta seguridad de buen éxito,» no hemos tenido la suerte de encontrarle en ninguno de los libros franceses, en demanda suya por nosotros durante mucho tiempo revisados.

Donde por vez primera hallamos, si no *todo* lo que buscábamos, *algo* parecido, algo de lo que Duhamel, en 1866 todavía, como ilusion irrealizable acariciaba, fué donde ménos podíamos esperarlo: en el apéndice al *Anuario* (*Jahrbuch*) *del Observatorio de Berlin*, correspondiente al año de 1841. Allí es,

en efecto, donde el célebre astrónomo J. F. Encke, director del mismo Establecimiento científico citado, publicó una *Memoria* sobre este asunto, en la cual analiza, discute y resuelve, por un procedimiento sencillo, directo y eficaz, superior á cuantos le habian precedido, y que compite ventajosamente con algun otro, muy notable, años despues publicado en Inglaterra, el problema en los siguientes absolutos y perentorios términos enunciado por Lagrange:

«Dada una ecuacion numérica, de cuyas raices no se tiene por de pronto conocimiento alguno, ni relativo á su especie ó naturaleza, ni ménos todavía á su magnitud, encontrar los valores numéricos de estas raices, exactos si es posible, ó tan aproximados á la verdad cuanto se desee y necesite en cualquier caso.»

Por el mismo método de cálculo y á la vez casi; sin preparacion alguna previa, ni transformacion preliminar; prescindiendo por completo de la regla de Descartes, y del teorema de Fourier, y de los métodos de Lagrange y de Sturm; y sin perder un minuto en tanteos infructuosos y molestos, ni escribir un solo guarismo innecesario, hállanse *simultáneamente* todas las raices reales y los módulos de todas las imaginarias que la ecuacion propuesta pueda contener, ateniéndose á los preceptos en aquella *Memoria* contenidos. De dos á tres horas de trabajo asíduo demanda á lo sumo, nos asegura Encke, la resolucion completa de una ecuacion de séptimo grado, con seis raices imaginarias, cuando la aproximacion se limita á la compatible con el uso de las Tablas de Logaritmos de siete cifras decimales, suficiente en la práctica casi siempre. Y, áun cuando esta apreciacion nos parezca un poco exagerada, en sentido favorable al nuevo método, cosa es de preguntar: ¿á cuántas horas y dias, y áun meses, ascendería el tiempo necesario para resolverla, con el mismo grado de aproximacion, por el procedimiento propuesto por Lagrange, y, con leves variantes, recomendado como el mejor y *más breve* en los tratados vulgares de Álgebra?—No es fácil averiguarlo. Ni áun por el procedimiento de Rutherford, derivado del de Lagrange, aunque mucho más expedito, seria empresa de poco momento el resolverla.

Y, sin embargo, el método que así responde «al misterioso presentimiento del alma,» de que nos habla Bordas-Démoulin, yace abandonado y cubierto por las sombras del olvido.— ¿Por qué? ¿por error de apreciacion y falso juicio de Encke? ¿ó por no ser verdad en la práctica lo que en teoría como cierto y ventajoso se nos representa?

Adviértase que Encke, perfeccionador y propagador del método, ni es su verdadero ó primitivo autor, ni el único que sobre su mérito ha emitido dictámen favorable. El autor original lo fué el profesor de Zurich, Gräffe, *premiado* en concurso público sobre este asunto por la *Real Academia de Ciencias* de Berlin, en 1839. Encke, prendado del trabajo de Gräffe y de la simplicidad y fecundidad del teorema fundamental en que descansa, se propuso perfeccionarle y completarle, y apurar hasta sus últimas consecuencias el procedimiento por el matemático suizo descubierto. Su juicio debe considerarse, por lo tanto, como imparcial y desinteresado, é hijo de la conviccion de que no seria desmentido nunca; y sus elogios y apreciaciones, en todos sentidos favorables, dimanan de natural y legítimo entusiasmo. Habiéndose limitado Gräffe á determinar las raices *reales* y los *módulos* de las imaginarias, cuando estas raices y estos módulos difieren unos de otros sensiblemente, Encke avanzó un poco más, y nos enseñó á determinar tambien las raices *imaginarias*, y á discutir y analizar los casos más difíciles, omitidos por su predecesor, en que módulos y raices, reales ó imaginarias, discrepan apénas, ó son, por excepcion rarísima, absolutamente iguales. Los antecedentes del asunto son estos.—¿Cómo, pues, sospechar que la Academia de Berlin premiase lo indigno de premio y erróneo ó despreciable en teoría? ¿Ni cómo suponer que malgastase el tiempo Encke en perfeccionar y divulgar un descubrimiento científico, desprovisto por completo de importancia?—Pues si en teoría el método de Gräffe seduce y atrae por su sencillez, más todavía encanta por la misma sobresaliente cualidad en el terreno de las aplicaciones: precisamente aquí es donde campea sin rival, y desafía la competencia de cualquiera otro.

La razon, pues, de ser este método tan poco conocido en la actualidad, á pesar de haberle compendiado algunos perió-

dicos científicos, como los *Anales de Matemáticas*,—¡catorce años despues de su publicacion por Encke!—no se nos alcanza. El amor patrio, muy mal entendido, de los tratadistas franceses; la pereza del espíritu, que rechaza como por instinto cualquier innovacion en cualquier órden de conocimientos; y la rutina de las escuelas, apasionada de lo antiguo y de todo lo que es aparatoso y deslumbrador, podrán disculpar tan extraña anomalía y olvido tan lamentable: explicarlos, no se explican de ningun modo.

De la *Memoria* de Encke aspira á ser traduccion, fiel en cierto sentido, ó en el fondo, pero no literal, la que en castellano insertamos á continuacion de esta advertencia.

No es, ni puede, ni debe ser traduccion literal, por varios motivos: por dos principalmente. Porque los genios, tan distintos, é incompatibles muchas veces, de ambos idiomas, aleman y castellano, se oponen á que lo sea. Y porque lo bueno en aleman y para lectores alemanes, acaso fuera mediano, ó difícil y hasta incomprensible, para la mayoría de los lectores españoles, ó por falta en éstos de preparacion científica, ó por sobra de imaginacion para meditar con calma todos aquellos puntos que, por demasiada sobriedad de exposicion, no pueden comprenderse al vuelo.—Quien al traducir no reflexione en la diferencia de aptitudes y disposiciones intelectuales del pueblo para quien el traductor escribió, y de la muchedumbre para quien el traductor se propone escribir, riesgo muy grave corre de perder el tiempo. Los manjares que sientan bien á estómagos robustos, necesitan muy distinto y delicado condimento si han de ser digeridos con facilidad por otros más débiles y como enfermos de atonía.

La *Memoria* de Encke no comprende más de 60 páginas en 4.°; y en tan breve espacio, sin division de materias en capítulos ni párrafos, ni un epígrafe de vez en cuando que recuerde al lector lo que ya lleva aprendido y le falta todavía por estudiar y aprender, y en estilo conciso y severo en demasía, hállase expuesto el asunto en su totalidad y como por un solo esfuerzo de la mente.

En la traduccion nos ha parecido que tan escueta y severa forma no debía respetarse; y que, para facilitar la inteligen-

cia de la *Memoria* original, convenia distribuir su contenido en varios capítulos, y éstos en párrafos, numerados y titulados todos. Al estilo apretado del autor, hemos tambien preferido otro más diluido, y conforme con la índole franca y expansiva de nuestro idioma; al razonamiento compendioso y como sibilítico, la demostracion ámplia y detallada; y al simple enunciado de algunas proposiciones, su más lata exposicion. Y cuando, por efecto muy comun é inevitable de largas y complicadas transformaciones algebráicas, hemos sospechado que el lector puede acaso perder el hilo del discurso ú olvidar el punto de partida y desconocer el de arribada, no hemos titubeado tampoco en intercalar algun breve resúmen de todo lo expuesto, para atar cabos sueltos y precisar bien las ideas.

Los ejemplos propuestos por Encke para ilustrar la teoría, son los comprendidos en el Capítulo VII, pocos en número y perfectamente escogidos, pero difíciles de resolver todos. Por lo cual, en los capítulos anteriores hemos creido muy conveniente intercalar algunos otros más sencillos, como aclaracion de las teorías parciales en ellos explicadas, y para estimular de contínuo la curiosidad del lector y recompensar de algun modo su constante y penosa asiduidad. No todos estos ejemplos son arbitrarios: algunos hay de intento entresacados de libros y autores célebres, con objeto de que pueda compararse para resolverlos el método de Gräffe con los de Newton, Lagrange, Sturm y cualquier otro.

Al final de la *Memoria* hemos agregado tres notas ó adiciones que consideramos importantes: la primera sobre un punto de análisis trigonométrica, relacionado con la teoría de Encke para determinar las raices imaginarias de las ecuaciones, y que en los tratados más conocidos de *Trigonometría* no se halla expuesto con demasiada claridad, si no está omitido por completo; la segunda sobre el método de aproximacion de Newton, que el uso del de Gräffe no excluye en absoluto, sino que, por el contrario, aprovecha y utiliza en tiempo oportuno y con superior ventaja; y la tercera sobre la determinacion de las raices imaginarias. Las dos primeras las hemos tomado del precioso arsenal de conocimientos de esta

especie, titulado: *Nuevos Anales de Matemáticas (Nouvelles Annales de Mathématiques)*, sin más trabajo que el de traducirlas con el mayor esmero posible; y la tercera, redactada con alguna mayor libertad, la consideramos tambien muy interesante, por hallarse estrechamente relacionada con el asunto principal, en el cuerpo de la *Memoria* explicado y discutido.

Con esto ya sabe el lector lo que le ofrecemos: una disertacion matemática de 120 ó más páginas, traducida de otra de escasas 60.—¿Pecaremos de inmodestos ó de exagerados calificando de *libre* la traduccion?—Falta que alguien, con fundado motivo, no pueda calificarla de *licenciosa:* si bien lo que más nos doleria es que fuese estéril, y que en nada contribuyese á reanimar en nuestro pais la aficion al estudio de las Matemáticas.

Miguel Merino.

CAPITULO I.

Resolucion de la ecuacion numérica del grado n, cuyas n raices son reales y desiguales.

§. 1.º

Enunciado de la cuestion.

Si representamos por

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n,$$

n números, enteros ó fraccionarios ó irracionales, positivos ó negativos, la ecuacion general numérica del mismo grado n podrá escribirse de este modo:

$$(1) \quad x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0.$$

Y si por

$$-a, -b, -c, \ldots\ldots -k, -l,$$

designamos los n valores de x que, sustituidos en esta ecuacion en lugar de la incógnita, pueden satisfacerla, ó las n, comunmente denominadas, *raices* de la ecuacion propuesta, en vez de la expresion (1) podremos escribir esta otra:

$$(2) \quad (x+a)\ (x+b)\ (x+c) \ldots\ldots (x+k)\ (x+l) = 0$$

No precisamente los valores de x, sino estos valores tomados con signo contrario, ó los segundos términos de los bi-

nomios componentes del anterior producto, recibirán en lo sucesivo el nombre de *raices* de la ecuacion que se trata de resolver. Más natural sería lo primero; pero lo segundo, sobre no producir complicacion alguna, merece, como inmediatamente se advertirá, preferencia en la práctica.

Las n raices

$$+a,\ +b,\ +c,\ \ldots\ldots\ +l,$$

dependientes de los coeficientes conocidos

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \ldots\ldots\ \alpha_n,$$

y que nos proponemos determinar con el mayor grado de aproximacion posible, serán segun los casos:

Reales todas; ó todas *imaginarias conjugadas*, de la forma

$$m \pm n\sqrt{-1}\,;$$

ó *reales* unas é *imaginarias* las demás.

Y, de cualquier especie ó forma que sean, podremos suponerlas:

Desiguales todas; ó, en totalidad ó en parte, muy poco discrepantes unas de otras, *iguales* casi, y hasta de idéntica expresion.

En este capítulo examinaremos el caso más sencillo, ó aquel en que las n raices de la ecuacion propuesta sean *reales* y propia ó sensiblemente *desiguales*.

§. 2.º

Principio fundamental del método.

Designando abreviadamente por

$$[a],\ [ab],\ [abc],\ \ldots\ldots\ [abc\ldots l],$$

las *sumas* de las n raices $a, b, c\ldots\ldots$, y de todos sus productos *binarios*, *ternarios*, *cuaternarios*, etc., etc., unos de otros distintos por alguno de los factores componentes, la ecuacion (2), equivalente á la (1), podrá representarse de este otro modo:

$$(3)\qquad x^n+[a]x^{n-1}+[ab]x^{n-2}+[abc]x^{n-3}+\ldots\ldots$$
$$+[abc\ldots k]\,x+[abc\ldots kl]=0.$$

Y si de esta ecuacion, por cualquier procedimiento, dedujésemos otra, cuyas raices fuesen las potencias m de las $a, b, c\ldots\ldots l$, su composicion podria análogamente expresarse como sigue:

$$(4)\quad x^n+[a^m]\,x^{n-1}+[a^m b^m]\,x^{n-2}+[a^m b^m c^m]\,x^{n-3}+\ldots\ldots$$
$$+[a^m b^m c^m\ldots k^m]\,x+[a^m b^m c^m\ldots k^m l^m]=0.$$

Mas en el doble supuesto de ser m número entero muy elevado y como indefinidamente grande, y de hallarse las n raices de la (3) relacionadas conforme la siguiente serie de desigualdades indica,

$$a > b > c > \ldots\ldots > k > l,$$

Febrero 16 de 1917. 9h 20m pm

$a > b \therefore \frac{a}{b} > 1 \therefore \frac{a}{b} = 1 + h$

$a > c \therefore \frac{a}{c} > 1 \therefore \frac{a}{c} = 1 + h'$

$a > d \therefore \frac{a}{d} > 1 \therefore \frac{a}{d} = 1 + h''$

$\frac{b}{a} = \frac{1}{1+h}$ $\quad 1 > \frac{b}{a} > \frac{c}{a} > \frac{d}{a} \ldots$

$\frac{c}{a} = \frac{1}{1+h'}$

22 $\frac{d}{a} = \frac{1}{1+h''}$

la última ecuacion propende á confundirse con esta otra, mucho más sencilla:

$$(5) \quad x^n + a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{n-2} + a^m b^m c^m x^{n-3} + \ldots\ldots$$

$$+ a^m b^m c^m \ldots k^m x + a^m b^m c^m \ldots k^m l^m = 0.$$

En efecto, si

$$a > b > c \ldots\ldots > k > l,$$

infiérese que

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1+h}; \frac{c}{a} = \frac{1}{1+h'}; \frac{d}{a} = \frac{1}{1+h''} \ldots\ldots; \text{ y}$$

$$h < h' < h'' < \ldots\ldots$$

$\frac{b^m}{a^m} = \frac{1}{(1+h)^m} = \frac{1}{1+mh+\Sigma}$

$\frac{1}{1+mh+\Sigma} < \frac{1}{1+mh}$

$\therefore \frac{b^m}{a^m} < \frac{1}{1+mh}$

De donde se deduce que

$$\frac{b^m}{a^m} < \frac{1}{1+mh}; \frac{c^m}{a^m} < \frac{1}{1+mh}; \frac{d^m}{a^m} < \frac{1}{1+mh} \ldots\ldots;$$

y, por lo tanto, que

$$\frac{b^m + c^m + d^m \ldots\ldots}{a^m} < \frac{n-1}{1+mh}.$$

El numerador del segundo miembro de esta desigualdad es un número finito, y generalmente pequeño, que solo depende del grado de la ecuacion que se trata de resolver; y, por el contrario, el denominador puede aumentar indefinidamente con m, ó con el exponente arbitrario de la potencia á que en la ecuacion (4) se encuentran ó suponen elevadas las raices de la (3). Luego la suma

$$b^m + c^m + d^m \ldots\ldots$$

$\frac{K}{a} > \frac{E}{a}$ ∴ $1 > \frac{1}{1+h} > \frac{1}{1+h'} > \frac{1}{1+h''} > \cdots\cdots$

$1+h > 1$

$1+h' > 1+h$

representa, conforme m crece, una cantidad cada vez menor, y, por último, insignificante ó despreciable con respecto al solo término a^m. A este primer término queda, pues, reducida la suma total, representada por el símbolo $[a^m]$. Y del propio modo se demostraria que las sumas análogas

$1+h'' > 1+h'$

$$[a^m b^m], \quad [a^m b^m c^m], \ldots\ldots$$

propenden á confundirse con sus primeros términos

$h > 0$ $\quad 0 < h < h' < h'' \ldots$

$h' > h$ ∴

$h'' > h'$

$$a^m b^m, \quad a^m b^m c^m, \ldots\ldots$$

Aunque no con demasiada propiedad, ampliando un poco el significado de la palabra *límite*, diremos en adelante que el de la ecuacion (4) se halla representado por la (5).—El uso de la palabra *límite*, admitidas las precedentes explicaciones, no parece que deba sernos prohibido en éste y otros casos análogos, como medio de simplificar el lenguaje y abreviar los razonamientos.

Adviértase ahora que si de la ecuacion (1), y sin el conocimiento prévio de las raices $a, b, c \ldots\ldots$, lográsemos deducir otra, equivalente á la (4), y averiguar luégo cuál es la ecuacion (5) hácia la cual la última converge, la (1) podria darse por resuelta. Dividiendo, en efecto, unos por otros,—el tercero por el segundo, el cuarto por el tercero, etc., etc.,—los coeficientes de la ecuacion (5), obtendríanse las potencias m de las n raices buscadas; y una simple operacion aritmética, que podria verificarse con auxilio de las tablas de logaritmos, completaría la investigacion de las mismas raices. Lo único que, si el exponente m fuese número *par*, quedaria indeterminado todavía, sería el *signo* de estas raices; pues, positivas ó negativas, todas producirian el mismo resultado elevándolas á la potencia m. Pero, despues de hallados sus valores absolutos, por division de los coeficientes de la ecuacion (5) en el orden referido, y extraccion de las raices m de los cocientes resultantes, los signos que deben precederlos se determinarán con auxilio de las diversas condiciones á que deben satisfacer, y que la ecuacion (1) comprende y claramente

expresa. Lo importante y hasta de necesidad absoluta es averiguar cómo de esta ecuacion se pasa á la (4), y luégo á la (5), que en sí contiene y compendia la solucion completa del problema.

§. 3.º

Cómo de la ecuacion propuesta puede concluirse otra cuyas raices sean los cuadrados de las que se buscan.

Si la transformacion de la ecuacion (1) en la (4) hubiera de hacerse forzosamente de una sola vez, ó como por un solo impulso de la mente del calculador, la cosa sería por extremo difícil y complicada. Pero la índole del problema de ningun modo exige que así se proceda; pues de lo que únicamente se trata es de obtener por de pronto una ecuacion cuyas raices sean las potencias m, por lo regular muy elevadas, de las raices de la propuesta; y este número m, prescindiendo de su magnitud considerable, completamente arbitrario, de tal manera puede elegirse, que al deseado término de la operacion sea factible llegar, ó indefinidamente aproximarse, procediendo por grados, poco á poco, y con grandísima sencillez y probabilidad suma de acierto. Primero, en efecto, se deducirá, si así nos conviene, de la ecuacion propuesta otra cuyas raices sean los *cuadrados* de las que pretendemos determinar; otra luégo, cuyas raices sean los *cuadrados* de las de la segunda, ó las potencias 2^2 de las mismas raices incógnitas; y otra y otras sucesivamente, hasta donde fuere menester, cuyas raices sean los *cuadrados* de las raices de la ecuacion anterior, ó las potencias 2^3, 2^4, 2^5..... de las raices de la propuesta. La regla que nos sirva para verificar una transformacion, nos servirá para todas las demás consecutivas; y el trabajo de cálculo lo será exclusivamente de tiempo y de paciencia.

Y la regla para deducir de una ecuacion otra, cuyas raices sean los *cuadrados* de las de la primera, no puede ser más

sencilla y hasta fácil de conservarse en la memoria. En efecto, si en la ecuacion (1)

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \ldots\ldots + \alpha_n = 0,$$

sustituimos, en vez de la incógnita x, la expresion $x^{1/2}$, obtendremos esta otra:

$$x^{\frac{n}{2}} + \alpha_1 x^{\frac{n-1}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{n-2}{2}} + \alpha_3 x^{\frac{n-3}{2}} + \ldots\ldots = 0.$$

La cual puede escribirse como sigue:

$$x^{\frac{n}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{n-2}{2}} + \alpha_4 x^{\frac{n-4}{2}} + \alpha_6 x^{\frac{n-6}{2}} + \ldots\ldots =$$

$$-\alpha_1 x^{\frac{n-1}{2}} - \alpha_3 x^{\frac{n-3}{2}} - \alpha_5 x^{\frac{n-5}{2}} - \alpha_7 x^{\frac{n-7}{2}} - \ldots\ldots$$

Y elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuacion, pasando luego al primero los términos del segundo, ordenando, y *cambiando los signos de los términos de órden par*, segundo, cuarto, sexto... ., conclúyese por último que:

$$(6)\quad \left.\begin{array}{l|l|l|l|l}
x^n + \alpha_1^2 & x^{n-1} + \alpha_2^2 & x^{n-2} + \alpha_3^2 & x^{n-3} + \alpha_4^2 & x^{n-4} + \ldots\ldots \\
-2\alpha_2 & -2\alpha_1\alpha_3 & -2\alpha_2\alpha_4 & -2\alpha_3\alpha_5 & -\ldots\ldots \\
 & +2\alpha_4 & +2\alpha_1\alpha_5 & +2\alpha_2\alpha_6 & +\ldots\ldots \\
 & & -2\alpha_6 & -2\alpha_4\alpha_7 & -\ldots\ldots \\
 & & & +2\alpha_8 & +\ldots\ldots \\
 & & & & -\ldots\ldots
\end{array}\right\} = 0.$$

El cambio de signos indicado tiene por objeto asimilar

en un todo esta ecuacion á la propuesta, equivalente á la (2):

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ \ldots\ldots\ (x+l)=0.$$

Pues, sin el cambio, la (6) equivaldria á

$$(x-a^2)\ (x-b^2)\ (x-c^2)\ \ldots\ldots\ (x-l^2)=0,$$

y, verificada aquella mutacion de signos, equivale á

$$(x+a^2)\ (x+b^2)\ (x+c^2)\ \ldots\ (x+l^2)=0:$$

con lo cual se gana más que se pierde en la práctica ó aplicacion del método que vamos exponiendo.

Comparando con la ecuacion (1) la (6), dedúcese que «un coeficiente cualquiera de esta última es igual al cuadrado del coeficiente del mismo órden ó lugar de la primera; *ménos* el doble producto de los dos coeficientes equidistantes, ó anterior y posterior, más próximos; *más* el doble producto de los otros dos coeficientes equidistantes inmediatos; *ménos*..... hasta obtener un doble producto *nulo*, por corresponder alguno de los factores á lugares extraños á la ecuacion propuesta, anterior al primero ó posterior al último.»—En la aplicacion de esta regla la ecuacion que se trata de transformar, siempre del grado n, debe considerarse como *completa:* para lo cual bastará suponer que los términos deficientes entre el primero y el último, que en los diversos casos particulares pudieren existir, figuran en realidad como otros tantos términos precedidos del coeficiente comun *cero* (*).

(*) De la ecuacion propuesta no solo puede deducirse con facilidad otra ecuacion cuyas raices sean los *cuadrados* de las raices de la primera, sino los *cubos* de aquellas mismas raices. Poniendo, en efecto, por x

§. 4.º

Resultado final de la transformacion explicada en el párrafo anterior, multitud de veces repetida.

El arte ó manera de pasar de la ecuacion (1) á la (4), queda con esto explicado; pero, y es lo importante, ¿cómo pasaremos de la (4) á la (5), ó en qué conoceremos que en al-

---

la expresion $x^{1/3}$, la ecuacion designada por (1) podrá considerarse como compuesta de estos tres distintos grupos de términos:

$$A = x^{\frac{n}{3}} + \alpha_3 x^{\frac{n-3}{3}} + \alpha_6 x^{\frac{n-6}{3}} + \ldots\ldots;$$

$$B = \alpha_1 x^{\frac{n-1}{3}} + \alpha_4 x^{\frac{n-4}{3}} + \alpha_7 x^{\frac{n-7}{3}} + \ldots\ldots; \text{ y}$$

$$C = \alpha_2 x^{\frac{n-2}{3}} + \alpha_5 x^{\frac{n-5}{3}} + \alpha_8 x^{\frac{n-8}{3}} + \ldots\ldots$$

Pero el *cubo* de la suma $A + B + C$, por ser esta suma igual á *cero*, se reduce á la siguiente expresion:

$A = -(B + C)$, $A^3 = -[B^3 + 3B^2C + 3BC^2 + C^3]$

$A^3 = -[B^3 + C^3 + 3BC(B + C)]$

$A^3 = -[B^3 + C^3 - 3ABC]$

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 0.$$

$\therefore A^3 = -B^3 - C^3 + 3ABC$

Y como los *cubos* de A, B y C, y el producto de estos tres polinomios, son evidentemente polinomios racionales con respecto á x, la proposicion queda demostrada.

sept. 20 de 1915 9h 33m pm

La *transformada* final de la ecuacion propuesta se encontraria algo más pronto por elevaciones sucesivas de sus raices al cubo que al cuadrado, con la circunstancia favorable de que los *signos* de las raices reales permanecerian invariables en el primer caso, mientras que en el segundo varían desde luégo y se convierten en *positivos:* lo cual dificulta la distincion de las raices, de la última transformada deducidas. Pero la ley de formacion de las diversas ecuaciones, encontradas por elevaciones al cubo, es tan complicada, que en la práctica debe preferirse el procedimiento de transformacion del texto al indicado en esta nota.

guna de las ecuaciones transformadas sucesivas las raices de la propuesta, elevadas á la potencia m, se hallan ya *separadas*, ó dispuestas en el órden en que la (5) las contiene en sus varios coeficientes?

Para contestar á esta pregunta comencemos por advertir que si $m' > m$, y la transformada, cuyas raices son las potencias m de las raices de la propuesta, posee ya esta composicion:

$$x^m + a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{n-2} + \ldots\ldots + a^m b^m \ldots l^m = 0,$$

aquella cuyas raices sean las potencias m', con mayor motivo, tendrá composicion análoga, y podrá tambien representarse de este modo:

$$x^m + a^{m'} x^{n-1} + a^{m'} b^{m'} x^{n-2} + \ldots\ldots + a^{m'} b^{m'} \ldots l^{m'} = 0.$$

Y, por lo tanto, si por A designamos el coeficiente de un término cualquiera, considerado en la primera de estas transformadas, y por A' el mismo término en la segunda, concluiremos que

$$A^{m'} = A'^{m}; \text{ ó } m' \log A = m \log A'; \text{ ó } \frac{m}{m'} = \frac{\log A}{\log A'}.$$

Cuando, pues, los logaritmos de los coeficientes análogos de ambas ecuaciones posean la relacion constante de los números m y m', entónces sabremos á ciencia cierta que ya hemos obtenido una ecuacion equivalente ó asimilable á la (5), y que, en consecuencia, la (1) puede ya darse en realidad por resuelta.

Si m es una potencia del número 2, como en la práctica del método sucede, y m' tambien, el coeficiente $\frac{m'}{m}$ será número entero; y, por lo tanto, A' será una potencia entera, $\frac{m'}{m}$, de A.—Luego, cuando en la práctica se advierta que de una ecuacion transformada á otra pasamos elevando al

cuadrado los coeficientes de la primera, inútil será prolongar la operacion, pues habremos ya obtenido la (5), ó llegado al término final asequible de la serie de transformaciones que nos habíamos propuesto realizar.

Pero, rigurosamente hablando, esto último no debe verificarse nunca, porque la ecuacion (5) es como un *límite* hácia el cual convergen las transformadas sucesivas de la (1); y, por lo mismo, habremos de contentarnos en la práctica con una mera aproximacion á este límite y resultado apetecido. Cuando, pues, en las aplicaciones de la regla formulada al final del §. 3.°, observemos que los *doble-productos* que, con los *cuadrados* de los coeficientes de una transformada, deben combinarse para deducir los coeficientes de la transformada sucesiva, son, si no nulos, muy pequeños, insignificantes ya, ó despreciables, con respecto á dichos *cuadrados*, entónces será cuando podamos suponer deducida la ecuacion (5), ó confundida casi con ella la que inmediatamente le precede.

§. 5.°

Más detalles y aclaraciones sobre el asunto del párrafo que antecede.

Mas al llegar á este punto surge de nuevo una dificultad, ya, en principio, poco antes considerada y desvanecida. ¿Disminuirán, en efecto, hasta ser despreciables, por último, los doble-productos mencionados, conforme, por la regla del §. 3.°, se vayan deduciendo las diversas ecuaciones, transformadas de la primitiva?—Indudablemente, ó no sería verdad lo concluido y demostrado en el párrafo anterior.

Despues de obtenidas, una tras de otra, varias ecuaciones de composicion análoga á la designada con el número (6), llegaremos á una que, si no es la (5), diferirá ya muy poco de ésta: á la siguiente, por ejemplo:

$$(7)\quad x^n + (a^m + \delta_1)\, x^{n-1} + (a^m b^m + \delta_2)\, x^{n-2} + (a^m b^m c^m + \delta_3)\, x^{n-3} + (a^m b^m c^m d^m + \delta_4)\, x^{n-4} + \ldots\ldots = 0,$$

en la cual δ_1, δ_2, δ_3..... representan cantidades muy pequeñas con respecto á los términos que en los diversos coeficientes de la ecuacion les preceden, é indefinidamente decrecientes, con relacion siempre á los expresados primeros términos, conforme aumenta el exponente arbitrario m.

Pues bien: un coeficiente cualquiera de la transformada sucesiva inmediata, el de x^{n-2}, por ejemplo, podrá, en virtud de la regla de composicion mencionada y resumida en la ecuacion (6), expresarse entónces de este modo:

$$(a^m b^m c^m + \delta_3)^2 - 2(a^m b^m + \delta_2)(a^m b^m c^m d^m + \delta_4) +$$

$$2(a^m + \delta_1)(a^m b^m c^m d^m e^m + \delta_5) - 2(a^m b^m c^m d^m e^m f^m + \delta_6).$$

O, efectuando los productos indicados y representando por Δ el conjunto de términos resultantes, dependientes de δ_1, δ_2, δ_3..... y que, con relacion á los demás, tienen por límite *cero*, de este otro modo, algo más breve y explícito:

$$a^{2m} b^{2m} c^{2m} - 2a^{2m} b^{2m} c^m d^m + 2a^{2m} b^m c^m d^m e^m -$$

$$2a^m b^m c^m d^m e^m f^m + \Delta.$$

Y si ahora comparamos, prescindiendo de los signos, con el primero de estos términos, $a^{2m} b^{2m} c^{2m}$, el segundo, con el segundo el tercero, y con el tercero el cuarto, hallaremos los tres cocientes que siguen:

$$2\left(\frac{d}{c}\right)^m; \left(\frac{e}{b}\right)^m; \text{ y } \left(\frac{f}{a}\right)^m:$$

evanescentes todos, conforme aumenta m, en la hipótesis de hallarse las raices ordenadas por su magnitud, segun la ya expuesta condicion preliminar indica:

$$a > b > c > d.....$$

Luego, si suponemos despreciable la cantidad Δ, los do-

ble-productos que deben combinarse con el cuadrado de $a^m b^m c^m$, para obtener el coeficiente de x^{n-3} en la nueva transformada que se busca, despreciables serán tambien, ó de valor relativo cada vez menor, comparados con aquel cuadrado, $a^{2m} b^{2m} c^{2m}$.

Y, además, conviene advertir que, si en vez de comparar un término cualquiera, de los que en la última transformada componen el coeficiente de x^{n-3}, con el que inmediatamente le precede, los comparásemos todos, segundo, tercero y cuarto, con el primero, obtendríamos estos resultados:

$$2\left(\frac{d}{c}\right)^m;\ 2\left(\frac{d}{c}\right)^m\left(\frac{e}{d}\right)^m;\ \text{y}\ 2\left(\frac{d}{c}\right)^m\left(\frac{e}{b}\right)^m\left(\frac{f}{a}\right)^m.$$

Lo cual prueba, ó con suficiente claridad indica, que, en el paso de una transformada á otra, la *correccion* que al cuadrado de un coeficiente de la primera debe aplicarse para componer el coeficiente del mismo término en la segunda, depende principal, si no exclusivamente, del doble producto de los dos coeficientes más inmediatos, anterior y posterior, al coeficiente cuyo *cuadrado* pretendemos corregir.

Apuremos todavía un poco más el asunto: y para ello continuemos suponiendo que, deducidas ya unas cuantas ecuaciones *transformadas* de la primitiva, sean, en efecto, despreciables las correcciones procedentes de los otros doble-productos que la (6), símbolo de todas ellas, contiene; y que tambien entónces el conjunto de términos, poco antes designado por Δ, pueda considerarse como insignificante con respecto al primero de los explícitos, $a^{2m} b^{2m} c^{2m}$.

En este doble supuesto, muy aproximado, pero nada más que aproximado, á la verdad ó realidad de las cosas, para pasar de la ecuacion (7) á la transformada análoga inmediata, bastaria elevar al cuadrado sus coeficientes y aplicarles las siguientes correcciones sustractivas y *relativas:*

$2\left(\frac{b}{a}\right)^m$, al 2.°; $2\left(\frac{c}{b}\right)^m$, al 3.°; $2\left(\frac{d}{e}\right)^m$, al 4.°; etc.; etc.

Y estas correcciones serán inferiores á cualquier cantidad pequeñísima, préviamente asignada, siempre que, si $2\left(\frac{d}{e}\right)^m$ representa la mayor de todas, el valor de m le determinemos por esta condicion:

$$2\left(\frac{d}{c}\right)^m < \alpha:$$

en la cual la letra α designa el límite ó valor extremo del *error relativo* que en la composicion de los varios coeficientes podemos todavía cometer.

Si, por ejemplo, y como aplicacion curiosa é importante de la última fórmula, suponemos que la relacion de las dos raices, ménos discrepantes una de otra, c y d, $(c > d)$, es igual á 1.1, ó 1.01, ó 1.001..... concluiremos que la máxima correccion, representada por $2\left(\frac{d}{c}\right)^m$, será menor que 0.00001, en los tres casos propuestos, cuando m sea respectivamente igual á 2^7, ó 2^{11}, ó 2^{14}. Lo cual equivale á decir que, áun cuando la diferencia de las dos raices más próximas ascienda por junto á una sola *décima*, *centésima* ó *milésima* parte de la menor, todas las raices se hallarán ya separadas en la 7.ª, 11.ª ó 14.ª transformada que de la ecuacion primitiva se dedujere: ó comprendidas todas en una ecuacion cuyos coeficientes sólo diferirán de los de la (5) en una *cienmilésima* parte de su valor: ó en una *millonésima*, á poco más que apuremos el asunto por el mismo procedimiento.—Hasta en la última desfavorable hipótesis, la ecuacion (1) puede, por lo tanto, con solo lo dicho, considerarse como muy aproximadamente resuelta. Mas, como para la separacion y determinacion de las raices *casi iguales* expondremos en otro capítulo un procedimiento más racional y breve que el referido, nunca habrá que avanzar hasta punto tan lejano, y bastará casi siempre, para obtener la solucion completa del problema, detenerse en la 7.ª, 8.ª ó 10.ª transformada de la ecuacion primitiva.

§. 6.°

Práctica del método.—Advertencias que se deben tener presentes en el cálculo de las raices de una ecuacion.

Las operaciones numéricas que la aplicacion del método general demanda pueden verificarse, sin abreviacion alguna, por las primeras y más sencillas reglas de la Aritmética; ó, más rápidamente y casi con la misma sencillez teórica, con auxilio de las tablas de logaritmos. Lo exacto es lo primero, pero no lo verdaderamente practicable y preferible; porque los coeficientes de las ecuaciones transformadas sucesivas, en términos tales y con tanta rapidez aumentan de tamaño ó valor, que no hay medio de combinarlos unos con otros, por via de multiplicacion y de suma ó resta, conforme la regla del §. 3.° pide, sin gran trabajo, considerable pérdida de tiempo, y riesgo sumo de equivocarse, á cada paso ó momento. Mucho más breve y factible es lo segundo, aunque no tan recomendable como lo primero en teòría: porque en las diversas ecuaciones citadas, que unas de otras se van sucesivamente desprendiendo, los verdaderos coeficientes se hallan reemplazados por otros que solo lo son aproximados; y, en el curso de las operaciones, los pequeños errores de las últimas cifras pudieran, tal vez, acumularse hasta producir en la postrera transformada otros errores de mayor cuantía, y acaso inadmisibles.

Para disipar todo motivo bien fundado de temor sobre este punto, advirtamos, sin embargo, dos cosas: 1.ª que, siendo los coeficientes de una transformada cualquiera aproximados á la verdad, por *exceso* unos y otros por *defecto*, en vez de acumularse, propenderán casi siempre los errores á compensarse unos con otros en la transformada siguiente; y 2.ª que, conteniendo las diversas ecuaciones, transformadas de la primitiva, las raices incógnitas elevadas á una potencia, m, cada vez mayor, los logaritmos de estas raices se deducirán

de los que á los coeficientes de la última transformada correspondan, *dividiéndolos* por este número *m:* lo cual reduce otro tanto los errores de que los logaritmos de aquellos coeficientes pudieran adolecer.

En principio, corroborado por la experiencia, admítese como cierto que, si se opera el cálculo de las diversas transformadas sucesivas con logaritmos de 5, 7 ó 10 cifras decimales, con otras tantas cifras casi dignas de confianza, se logrará determinar los logaritmos de las raices de la ecuacion propuesta: ó estas raices con grado de aproximacion relativa expresado por $\frac{1}{10^5}$, ó $\frac{1}{10^7}$, ó $\frac{1}{10^{10}}$, de su propio valor.

Preferible será, sin embargo, cuando esto pueda hacerse sin grave inconveniente y notable incremento de trabajo, combinar uno con otro ambos procedimientos de cálculo referidos, directo y aproximado ó logarítmico: calcular, por ejemplo, las dos primeras transformadas, sin abreviacion ni error ó incertidumbre de ningun género; con auxilio de los logaritmos de 6 ó 7 cifras decimales, las dos que siguen; y de solas 5 cifras las demás, hasta llegar á la última.—La multiplicidad de casos que pueden presentarse en la práctica impide prefijar, en términos bien precisos y concretos, lo que en cada uno de ellos deba ó convenga hacerse.

§. 7.º

Regla de Newton para corregir los valores aproximados de las raices, ya deducidos por el método de Gräffe.

Suponiendo ya separadas las raices reales de la ecuacion propuesta y determinados sus valores con el grado de aproximacion que el uso de las tablas logarítmicas de cinco cifras decimales permite obtener, por la sencillísima regla de Newton, infalible cuando se trata de raices propiamente desiguales, ó

cuando un número es valor aproximado de una sola y no de dos ó más raices, podrá ampliarse aquella primera aproximacion hasta la 9.ª ó 10.ª cifra decimal, por ejemplo. Esta regla, en todos los tratados de Álgebra contenida, se demuestra y formula del siguiente modo, adecuado al cálculo logarítmico.

Representemos abreviadamente por $f(x)$ el primer miembro de la ecuacion propuesta; y desde luégo podremos escribir lo que sigue;

$$(8) \qquad f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_n = 0.$$

Designando por x_0 el valor aproximado de x, ya conocido, y por Δx_0 la correccion que tratamos de calcular, en vez de la ecuacion (8), dispondremos de esta otra:

$$(9) \qquad f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + \Delta x_0 \times f'(x_0) + \ldots\ldots = 0.$$

La cual, aproximadamente, ó despreciando todos los términos que en el primer miembro se hallan multiplicados por potencias de Δx_0, iguales ó superiores á la 2.ª, se reduce á ésta:

$$(10) \qquad f(x_0) + \Delta x_0 \times f'(x_0) = 0.$$

Pero lo que necesitamos hallar no tanto es la correccion del valor x_0 como la de su logaritmo, $\Delta \log x_0$; puesto que, procediendo como en el párrafo anterior hemos indicado, lo que inmediatamente se obtiene es el valor de $\log x_0$.

Pues bien: despreciando asimismo los términos multiplicados por las potencias, superiores á la primera, de Δx_0, y representando por M el *módulo* de los logaritmos vulgares, ó el número 0.4342945, cuyo logaritmo es igual á $\bar{1}.6377843$, sábese parecidamente que

$$(11) \qquad \Delta \log x_0 = \log(x_0 + \Delta x_0) - \log x_0 =$$

$$= \log\left(1 + \frac{\Delta x_0}{x_0}\right) = M \times \frac{\Delta x_0}{x_0}.$$

Y, combinando una con otra las dos ecuaciones (10) y (11), conclúyese, en fin, que

$$\Delta \log x_0 = -\frac{f(x_0)}{x_0 f'(x_0)} \times M;$$

ó

$$(12) \qquad \Delta \log x_0 = -\frac{[x_0^n]}{[n\, x_0^n]} \times M,$$

si con los símbolos $[x_0^n]$ y $[n\, x_0^n]$ representamos estos dos polinomios:

$$[x_0^n] = x_0^n + \alpha_1 x_0^{n-1} + \ldots\ldots \alpha_{n-1} x_0 + \alpha_n,$$

y

$$[n\, x_0^n] = n\, x_0^n + (n-1)\, \alpha_1 x_0^{n-1} + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} x_0 :$$

el primero de los cuales necesitamos formar ó calcular siempre para cerciorarnos del grado de aproximacion de x_0; pudiendo luégo deducir el segundo del anterior por la simple multiplicacion de todos sus términos respectivamente por la serie de números n, $n-1$, $n-2$, ... 1 y 0.

Obtenido, en suma, el $\log x_0$ con cinco cifras decimales, de la fórmula (12) deduciremos la correccion que debemos aplicarle para obtenerle con siete; y muy rara vez en la práctica será menester prolongar todavía más la operacion. Pero, en caso de necesidad, repitiendo con el valor ya corregido las operaciones que la misma fórmula (12) indica, se hallaria un nuevo valor de $\log x_0$, aproximado hasta la 10.ª cifra decimal, si las nuevas operaciones se efectúan con logaritmos de diez cifras.

§. 8.°

Aplicacion de todo lo expuesto á la resolucion de varios ejemplos.

—

Con objeto de aclarar un poco todo lo que precede, propongámonos, antes de seguir más adelante, resolver, por el método general expuesto, algunas ecuaciones muy sencillas.

(*a*)—Y, en primer lugar, consideremos la ecuacion propuesta por Lagrange en el Capítulo IV de su célebre *Tratado de la Resolucion de las Ecuaciones Numéricas*, para exponer y aplicar su método, y posteriormente reproducida en casi todos los Tratados de Álgebra franceses, en el capítulo consagrado al mismo asunto:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Para resolverla por el procedimiento en las páginas anteriores referido, necesítase, por de pronto, *completarla*, ó escribirla de este modo:

$$(2^0) \quad x^3 + 0 \,.\, x^2 - 7x + 7 = 0.$$

Como los coeficientes son muy pequeños, y fáciles de combinar unos con otros por la regla del §. 3.°, las dos primeras transformadas, cuyas raices son respectivamente iguales á los *cuadrados* y *cuartas potencias* de las raices de la ecuacion primitiva, se deducirán inmediatamente, ó prescindiendo de las tablas de logaritmos. Estas dos nuevas ecuaciones son las siguientes.

$$(2^1) \qquad x^3 + 14x^2 + 49x + 49 = 0,$$

y

$$(2^2) \qquad x^3 + 98x^2 + 1029x + 2401 = 0.$$

Y en vez de la última ecuacion, puesto que ya sus coeficientes son un poco grandes ó considerables, y las operaciones sucesivas de transformacion de la ecuacion propuesta se complican por este motivo, escribiremos esta otra, meramente simbólica, ó en la cual los coeficientes de la anterior se hallan reemplazados por sus logaritmos, aproximados hasta la 6.ª cifra decimal:

$$(2') \quad x^3 + 1.991226\, x^2 + 3.012415\, x + 3.380392 = 0.$$

Para formar el coeficiente del segundo término de la siguiente transformada será menester ahora:

Multiplicar por 2 el logaritmo 1.991226;

Sumar con 3.012415 el logaritmo de 2, igual á 0.301030;

Buscar en las tablas logarítmicas los números 9604 y 2058, correspondientes al producto 3.982452 y á la suma 3.313445;

Restar del primero de estos números el segundo;

Y buscar el logaritmo, 3.877717, de la diferencia, que será (§. 3.º) el coeficiente que nos habíamos propuesto determinar.

Para deducir el coeficiente del tercer término, será preciso análogamente:

Multiplicar por 2 el coeficiente 3.012415;

Sumar el logaritmo de 2 con la suma de los coeficientes 1.991226 y 3.380392;

Buscar en las tablas los números exactos ó *aproximados*, correspondientes á este producto y esta suma, 1058840 y 470596;

Restar del primero el segundo;

Y buscar el logaritmo, 5.769557, correspondiente á su diferencia.

Y, en fin, para deducir el último coeficiente de la tercera ransformada, ó el término independiente de la incógnita x, bastará *duplicar* el último de la anterior.

Luego, en suma, la ecuacion cuyas raices son las *octavas*

potencias de las de la propuesta podrá simbólicamente representarse de este modo:

$$(2^3)\quad x^3+3.877717\,x^2+5.769557\,x+6.760784=0.$$

Y, análogamente, se deducirá luégo que

$$(2^4)\quad x^3+7.746367\,x^2+11.413345\,x+13.521568=0;$$

$$(2^5)\quad x^3+15.492662\,x^2+22.802010\,x+27.043136=0;\ \text{y}$$

$$(2^6)\quad x^3+30.985324\,x^2+45.603276\,x+54.086272=0.$$

Si de esta última transformada intentásemos pasar á la siguiente, designada por el símbolo (2^7), que recuerda la potencia á que las raices de la ecuacion primitiva se encontrarian en ella elevadas, tendríamos por de pronto que:

Multiplicar por 2 el logaritmo 30.985324, y buscar el número correspondiente al producto, el cual constaría de 62 cifras enteras: seis ó siete *significativas*, que tomaríamos de las tablas; y 55 ó 56 *ceros*, que deberíamos suplir mentalmente para completar el total de guarismos;

Sumar con el logaritmo 45.603276 el de 2: lo cual nos daria un logaritmo, cuya característica sería 45, correspondiente á un número de 46 cifras;

Y restar del primero de los números encontrados el segundo.

Pero, restando de un número de 62 cifras otro de 46, ni áun de bastantes más, las siete primeras de la diferencia serán las mismas siete del minuendo. Luego, limitando la aproximacion á la que pueden suministrar los logaritmos de seis cifras decimales, el coeficiente del segundo término de la transformada (2^7) se obtendria duplicando el segundo de la (2^6).—Y lo mismo se demostrará que, en el caso propuesto, pueden obtenerse los coeficientes de los otros términos: por simples *duplicaciones* de los correspondientes en la transformada anterior.

Conclúyese, pues, que obtenida la ecuacion (2ª), es inútil seguir más adelante; porque, si no exactamente, lo cual es de todo punto imposible, con suficiente grado de aproximacion, hemos ya formado la ecuacion en el §. 2.° designada por el número (5), la cual contiene la solucion completa de la propuesta.

En efecto, designando por a, b, c, las tres raices buscadas, y limitando la aproximacion á la 6.ª cifra decimal en los logaritmos, sabemos ya que

$$\log a^{2^6}=30.985324;\quad \log (ab)^{2^6}=45.603276;$$

$$\text{y}\quad \log (abc)^{2^6}=54.086272.$$

De donde se concluye sencillamente que

$$\log a=0.484146;\quad \log b=0.228405;\quad \text{y}\quad \log c=0.132547.$$

Y, por lo tanto, que

$$a=3.04892;\quad b=1.69202;\quad \text{y}\quad c=1.35690.$$

Falta todavía determinar los signos de estas raices. Mas, si en la ecuacion á que corresponden en vez de x se sustituyen sucesivamente los valores aproximados 3.05, 1.69 y 1.36, inmediatamente se concluirá que la primera debe ser *negativa*, y *positivas* las otras dos. La doble condicion expresa en la ecuacion (2°), de que sea *nula* la suma de las tres raices y *negativo* el producto, basta en rigor para determinar sus *signos*.

Y si á los valores de a, b y c, directamente encontrados, les aplicamos las correcciones que la regla de Newton nos proporcionaría, sin dificultad teórica alguna, hallaremos en conclusion que

$$a=-3.048917340;$$

$$b=+1.692021472;\quad \text{y}$$

$$c=+1.356895868.$$

(*b*)—De solucion más rapida todavía que la ecuacion precedente es la que sigue, propuesta por Mr. J. Bourget en el número de los *Nuevos Anales de Matemáticas*, correspondiente al mes de Enero de 1869, como ejemplo muy apropiado para poder en él apreciar el mérito de una muy pequeña, pero ingeniosa, innovacion, introducida en el método de Newton por Mr. Darboux:

$$(2^{\circ}) \qquad x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0.$$

Las dos primeras transformadas de esta ecuacion son las siguientes:

$$(2^1) \qquad x^3 + 23x^2 + 73x + 16 = 0; \quad \text{y}$$

$$(2^2) \qquad x^3 + 383x^2 + 4593x + 256 = 0.$$

Reemplazando los coeficientes por sus logaritmos, la última puede escribirse de este otro modo:

$$(2^2) \qquad x^3 + 2.583199\,x^2 + 3.662096\,x + 2.408240 = 0.$$

Y de ésta se deducen las dos siguientes: con lo cual concluye la operacion:

$$(2^3) \qquad x^3 + 5.138315\,x^2 + 7.320136\,x + 4.816480 = 0;$$

y

$$(2^4) \qquad x^3 + 10.275669\,x^2 + 14.640254\,x + 9.632960 = 0.$$

Fácil, en efecto, sería ver que la transformada (2^5) se desprende de la (2^4) por la simple *duplicacion* de sus coeficientes logarítmicos. Luego en la (2^4) las raices de la propuesta se encuentran combinadas unas con otras, como en la (5) del §. 2.°, las de la ecuacion general (1). Por lo tanto:

$$\log a^{16} = 10.275669; \qquad \log a^{16} b^{16} = 14.640254; \qquad \text{y}$$

$$\log.\ a^{16} b^{16} c^{16} = 9.632960.$$

De donde se deduce que

$$\log a = 0.642229; \quad \log b = 0.272789; \quad \text{y} \quad \log c = \bar{1}.687044.$$

$$\text{Y} \quad a = 4.38762; \quad b = 1.87407; \quad \text{y} \quad c = 0.486457.$$

La sustitucion de estos valores, ó de otros más breves que les sean aproximados en la ecuacion propuesta, basta para determinar los signos que deben precederlos: *positivos* los de la primera y tercera raiz, y *negativo* el de la segunda.

Y si la aproximacion directamente obtenida no se considerase suficiente, por el método ó regla de Newton, expuesta en la primera parte del §. 7.°, sin modificacion ó perfeccionamiento alguno, se concluirá que

$$a = +4.387619058;$$

$$b = -1.874075531; \quad \text{y}$$

$$c = +0.486456473.$$

(*c*)—Resolvamos todavía, y será por ahora el último, otro ejemplo algo más complicado, y tambien más interesante, que los dos anteriores. El que sigue:

$$(2^{\circ}) \quad x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0.$$

Las tres primeras transformadas de esta ecuacion, deducidas por la regla del §. 3.° y simbólicamente escritas, son:

$$(2^1) \quad x^4 + 3.3809345\,x^3 + 6.2073877\,x^2 + 8.3077826\,x + 7.3979400 = 0;$$

$$(2^2) \quad x^4 + 6.4073993\,x^3 + 12.2101035\,x^2 + 16.6147161\,x + 14.7958800 = 0; \quad \text{y}$$

$$(2^3) \quad x^4 + 12.5163878\,x^3 + 24.3840080\,x^2 + 33.2294317\,x + 29.5917600 = 0.$$

Y, llegados á este punto, se advierte inmediatamente que los coeficientes de x^4 y de x^0 en la ecuacion (2^4) se obtendrian por la simple duplicacion de los mismos en la (2^3). Luego

$$2^3 \times \log abc = 33.2294317; \quad \text{y}$$

$$2^3 \times \log abcd = 29.5917600.$$

De donde se deduce que

$$\log d = \bar{1}.5452911; \quad \text{y} \quad d = 0.3509871.$$

La *menor* de las cuatro raices de la ecuacion (2^0) queda con esto determinada; pero no las otras tres, que en la (2^3) existen ligadas todavía y como revueltas unas con otras.

Para separar y determinar la raiz c basta deducir una transformada más de la ecuacion primitiva: la (2^4) adjunta:

$$(2^4)\ x^4 + 24.7739141\, x^3 + 48.7671899\, x^2$$
$$+ 66.4588634\, x + 59.1835200 = 0.$$

De la cual se pasará á la (2^5) componiendo el coeficiente de x^3 por la regla del §. 3.°, y *duplicando* los demás. Luego, á las relaciones que nos sirvieron para hallar el valor aproximado de la raiz d, podremos agregar esta otra:

$$2^4 \times \log ab = 48.7671899.$$

Y de esta relacion, combinada con la primera de las dos anteriores, se concluye sin dificultad el siguiente resultado:

$$\log c = 1.1057295; \quad \text{ó} \quad c = 12.75644.$$

Pero el coeficiente de x^3 no se obtendrá por simple duplicacion del mismo en la transformada precedente, hasta llegar á la transformada (2^6); y hasta entónces no lograremos

separar una de otra y determinar las dos raices *mayores*, b y a. El trabajo de cálculo no es, sin embargo, demasiado penoso, conforme puede verse á continuacion:

$$(2^5)\quad x^4 + 49.3729752\, x^3 + 97.5343797\, x^2 + \ldots\ldots = 0$$

$$(2^6)\quad x^4 + 98.6890126\, x^3 + 195.0687594\, x^2 + \ldots\ldots = 0$$

$$(2^7)\quad x^4 + 197.3737428\, x^3 + 390.1375188\, x^2 + \ldots\ldots = 0$$

$$(2^8)\quad x^4 + 394.7474642\, x^3 + 780.2750376\, x^2 + \ldots\ldots = 0.$$

Y, con esto, de las expresiones

$$2^4 \times \log ab = 48.7671899, \quad \text{y} \quad 2^8 \times \log a = 394.7474642,$$

se concluye finalmente que

$$b = 32.06026, \quad \text{y} \quad a = 34.83231.$$

En las últimas cifras de los valores de a, b, c y d no debe abrigarse ilimitada confianza, ya porque en el curso de las operaciones aritméticas puede haberse cometido algun pequeño error, ya porque el uso muy reiterado de las tablas de logaritmos no siempre permite que se abrigue con fundamento. Sustituyendo, pues, aquellos cuatro valores de a, b, c y d en la ecuacion (2°), con objeto de cerciorarse de su grado de exactitud, y corrigiéndolos luego por la regla de Newton, se hallará que los cuatro son *positivos*, é iguales en conclusion á estos:

$$\left.\begin{array}{l} a = 34.832280288, \\ b = 32.060290872, \end{array}\right\}; \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} c = 12.756441794, \\ d = \ \ 0.350987046. \end{array}\right\}.$$

§. 9.°

Carácter y trascendencia del método explicado.—Aplícase tambien á la investigacion de las raices iguales.

Advirtamos, para concluir, que á la resolucion de las tres ecuaciones propuestas hemos procedido inmediatamente, sin detenernos á investigar los *límites extremos* entre los cuales las raices podian estar comprendidas; ni, ménos, á *separar* unas raices de otras; y hasta sin saber, ni preocuparnos préviamente de averiguarlo, si las raices serían *reales* todas ó si las habria tambien *imaginarias*.

Por el método en las páginas anteriores expuesto, la *separacion* de las raices, la *determinacion* de sus valores aproximados, y la *distincion* de sus diversos caractéres ó especies, se efectúan por la misma regla y casi sin esfuerzo de la mente, mediante una larga, pero muy sencilla, serie de operaciones, que cualquier mediano calculador puede verificar.

Cuando todas las raices son *reales*, ya hemos visto cómo se aislan y determinan; y pronto nos convenceremos de que el procedimiento apénas experimenta modificacion alguna cuando existen raices mezcladas de ambas especies. Mas ¿por dónde inferiremos que la ecuacion propuesta sólo contiene raices reales, y que, por lo tanto, nos hallamos en el caso más sencillo de cuantos en la práctica pueden presentarse? Por el siguiente simplicísimo carácter: porque *todos* los coeficientes de *todas* las ecuaciones transformadas de la propuesta, que sucesivamente se fueren obteniendo, hasta deducir aquella que prácticamente se confunda con la (5) del §. 2.°, serán entonces *positivos*. Y la razon es óbvia.

La ecuacion propuesta equivale al producto, igualado á *cero*, de los n factores $x+a$, $x+b$, $x+c$..... y puede contener términos *positivos* y *negativos*, segun sean los signos de

a, b, c..... Pero su primera transformada equivale al producto de los n factores $x+a^2$, $x+b^2$, $x+c^2$....., y, cualesquiera que sean los signos mencionados, si aquellas cantidades son reales, todos los términos serán necesariamente *positivos*. Y lo mismo sucederá y se advertirá en las transformadas sucesivas, cuyos coeficientes, además, propenderán hácia otros tantos *límites* determinados, si las raices de la propuesta, prescindiendo de sus signos, pueden considerarse como propiamente *desiguales* ó diferentes.

Por los caractéres opuestos, como en el capítulo próximo procuraremos demostrar, se infiere precisamente la existencia de las *raices imaginarias*.

Ni se crea tampoco que, cuando entre las raices reales de la ecuacion hay dos ó más *iguales*, falla el método ó se complica en demasía: cuando todo lo que su aplicacion demanda entónces es un poco de atencion y discernimiento de parte del calculador.

¿Qué sucedería, por ejemplo, si las tres raices mayores, a, b y c, coincidiesen en *valor*, aunque discrepasen en *signo?*—Que en la expresion simbólica $[a^m]$, habria entónces *tres* términos iguales, *superiores* á todos los demás consecutivos, y que el *límite* de aquella expresion se hallaria representado por $3a^m$; *tres*, tambien iguales, en la $[a^m\ b^m]$, cuyo límite sería $3a^{2m}$; y que en la $[a^m\ b^m\ c^m]$ propenderían á desvanecerse todos los términos, desde el segundo inclusive, parangonados con el *primero*, a^{3m}.—Los coeficientes de la transformada (2^m) podrían en este caso representarse del siguiente modo, atribuyendo á las letras δ valores relativos muy pequeños y como evanescentes en cotejo de los términos con quienes los por estas letras designados se comparan:

$$1,\ 3a^m+\delta_1,\ 3a^{2m}+\delta_2,\ a^{3m}+\delta_3,\ a^{3m}d^m+\delta_4,\ \ldots..$$

Y, por muy grande que ya m sea, ¿qué sucederá cuando de la transformada (2^m) pasemos, por la regla del §. 3.°, á la (2^{2m})?—Sucederá, y se advertirá sin la menor dificultad, que los coeficientes de la última, *segundo* y *tercero*, no se ob-

tienen por simples elevaciones al cuadrado, ó *duplicaciones* de los logaritmos respectivos, de los $3a^m + \delta_1$ y $3a^{2m} + \delta_2$; pero sí todos los demás que les siguen á continuacion. A los coeficientes *segundo* y *tercero* de la transformada (2^m) corresponden en la (2^{2m}) los $3a^{2m}$ y $3a^{4m}$, que distan mucho de confundirse con los *cuadrados* de los $3a^m$ y $3a^{2m}$; pero, desde el *cuarto* inclusive en adelante, la ley, en la formacion de los anteriores fallida, vuelve á imperar rigurosamente y ya sin excepcion alguna.

La señal ó indicio de que entre las raices reales de la ecuacion propuesta las hay *iguales* ó *casi iguales*, consistirá, pues, en que al principio, en el medio, ó al fin, de las diversas ecuaciones transformadas que sucesivamente unas de otras se fueren desprendiendo, por la regla general del §. 3.°, existan uno, dos ó más coeficientes consecutivos, que, sin variar de signo, no puedan, sin embargo, considerarse nunca como *cuadrados* de los que inmediatamente les corresponden y preceden en la transformada anterior, ú obtenerse sus logaritmos por simples *duplicaciones* de los ya encontrados, ó con independencia completa de los logaritmos de los demás coeficientes, anteriores ó posteriores al del órden que se procura obtener. Cuando esto se advierta, há lugar á reflexionar: á inferir, por el número de coeficientes en cierto modo *indeterminados*, el de las raices iguales; y á deducir el valor de la raiz múltiple, con auxilio del primer coeficiente *determinado* que á los indeterminados siga. Y, si esto último no fuese fácil ó posible alguna vez, há, por lo ménos, siempre lugar á *sospechar* que la ecuacion propuesta contiene raices iguales, y á tratar de descomponerla en factores por el procedimiento general de investigacion, explicado en los tratados generales de Álgebra. Procedimiento en verdad elegante y muy satisfactorio en teoría; pero que fuera absurdo precipitarse á poner en práctica, sin abrigar alguna sospecha y confianza, préviamente adquiridas, de que el fatigoso trabajo que su aplicacion demanda no carece de oportunidad ú objeto.

Sin perjuicio de insistir más adelante sobre este mismo asunto, aclaremos ahora lo acabado de exponer con un par de ejemplos muy sencillos:

(a)—Si se tratase de resolver la ecuacion

$$(2^{\circ}) \qquad x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0,$$

al llegar á la transformada simbólica

$$(2^{5}) \quad x^3 + 5.1175132\,x^2 + 9.6329731\,x + 9.6329598 = 0,$$

habríamos ya advertido que el coeficiente de x propende hácia cierto *límite;* mas nó el de x^2: el cual, en el paso de una transformada á otra, experimenta considerables modificaciones por la influencia que en su valor ejerce el coeficiente que le sigue en la anterior ó primera. Y que la ecuacion (2°) posee alguna cualidad extraña ó poco frecuente, acabaríamos de comprenderlo al construir la transformada

$$(2^{6}) \quad x^3 + 9.9339896\,x^2 + 19.2659196\,x + 19.2659196 = 0,$$

cuyos coeficientes *tercero* y *cuarto* discrepan muy poco y nada, respectivamente, de los duplos de los mismos coeficientes en la (2^{5}), y considerablemente el *segundo,* por el contrario.

¿Qué pensar de la ecuacion (2°)? ¿que tiene *dos* raices iguales, puesto que el número de los coeficientes indeterminados en la serie de las transformadas no pasa de *uno?* ¿y que estas dos raices *iguales*, ó muy poco diferentes una de otra, deben ser las mayores, en atencion al lugar que ocupa el expresado anómalo coeficiente?—Pero, si esto fuera verdad, deberia verificarse que:

$$\log 2a^{2^{6}} = 9.9339896, \quad \text{y} \quad \log a^{2.2^{6}} = 19.2659196.$$

Y esto es, por cierto, lo que se verifica y sucede. La raiz *doble*, ó la parte comun muy considerable de las raices a y b, se deduce de cualquiera de estas dos ecuaciones condicionales, y es igual, en *valor absoluto*, á la que sigue:

$$a = b = 1.414214\ldots = \sqrt{2}\,.$$

En *valor*, hemos dicho; porque el método de investigacion no distingue de *signos;* y porque, si al exámen de las condiciones comprendidas en la ecuacion (2°) apelásemos para salir de dudas en el caso presente, concluiríamos que la igualdad de ambas raices sólo en el primer concepto se verificaba.—La tercera raiz, c, se hallaría por el procedimiento general; y, como la transformada (2°) claramente nos revela, coincide en valor con la unidad.

(*b*)—Las mismas dos raices iguales que la ecuacion anterior, posee la siguiente:

$$(2^{\circ}) \qquad x^4 - x^3 - 9x^2 + 2x + 14 = 0.$$

Y para descubrirlas, y áun para resolver por completo esta ecuacion, basta deducir sus diversas transformadas hasta la (2°) ó (2°), á lo sumo, y advertir cuidadosamente lo que entónces sucede. Y lo que sucede es: que los coeficientes de x^3 y x^2, y de x^0 como siempre, se deducen desde la (2°) en adelante, por simples duplicaciones de los análogos en la transformada anterior: mientras el de x^1 permanece como indeterminado, ó sometido á la influencia que en su composicion y valor ejercen los que le preceden y siguen. De la transformada

$$(2^{6}) \quad x^4 + 32.2650954\,x^3 + 54.0862744\,x^2 + 64.0202616\,x + 73.3521944 = 0,$$

despues de verificado el trabajo y vencidas las dificultades que su construccion demanda, como por instinto se desprenden las consecuencias en los siguientes términos formuladas:

$$\log a^{2^6} = 32.2650954\,;$$

$$\log (ab)^{2^6} = 54.0862744\,;$$

$$\log 2\,(abc)^{2^6} = 64.0202616\,; \quad \text{y}$$

$$\log (abc^2)^{2^6} = 73.3521944.$$

Las dos raices *mayores* y una de otra *diferentes*, *a* y *b*, se deducen, como de costumbre, de las dos primeras anteriores igualdades; y la raiz inferior y *doble*, *c*, de la combinacion de la igualdad tercera con la segunda, ó de la cuarta con la tercera.

La coexistencia en la ecuacion primitiva de ambas especies de raices complica, pues, como se acaba de ver, poquísimo ó nada el método de solucion en este capítulo expuesto: método verdaderamente general, ó aplicable, con discernimiento y pulso, á todos los casos que en la práctica puedan surgir y presentarse.

CAPITULO II.

Determinacion de los módulos de las raices imaginarias, cuando la ecuacion sólo contiene raices de esta especie.

§. 10.

Definicion del nuevo problema.

Una ecuacion de grado *par*, $2n$ por ejemplo, que sólo contenga raices imaginarias, se puede considerar, en principio, como compuesta de n factores, trinomios reales de 2.° grado, de la forma $x^2 + fx + g^2$; en los cuales debe necesariamente verificarse que $f < 2g$. Para la definicion completa de estos trinomios, necesítase, pues, conocer, en magnitud y signo, lo que vale f, y sólo en el primer concepto lo que g representa.—Los valores absolutos de g, correspondientes á los n trinomios, ó n pares de raices imaginarias *conjugadas*, que la ecuacion, por hipótesis, contiene, son los *módulos* de estas raices, y las incógnitas del problema que á renglon seguido nos proponemos principalmente determinar. Del cálculo de los valores de f trataremos con especialidad en el capítulo inmediato.

El trinomio $x^2 + fx + g^2$ equivale á este producto de factores de primer grado, con relacion á la letra x:

$$\left(x + {}^1/_2 f + {}^1/_2\sqrt{4g^2 - f^2}\cdot\sqrt{-1}\right) \times \left(x + {}^1/_2 f - {}^1/_2\sqrt{4g^2 - f^2}\cdot\sqrt{-1}\right).$$

Ó á este otro, si préviamente suponemos que

$$f = 2\alpha, \quad \text{y} \quad g = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}:$$

$$\left(x + \alpha + \beta\sqrt{-1}\right) \times \left(x + \alpha - \beta\sqrt{-1}\right).$$

Ó al siguiente, si continuamos suponiendo que

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}:$$

$$\{x+g(\cos\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)\}\times\{x+g(\cos\varphi-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)\}.$$

Ó, en último extremo, al nuevo trinomio:

$$x^2+2g\cos\varphi\,.\,x+g^2.$$

Y, del propio modo que la ecuacion propuesta, aquella otra cuyas raices sean las potencias m de las raices de la primitiva podrá considerarse como equivalente á un producto de $2n$ factores de primer grado, *conjugados*, de la forma

$$x+g^m(\cos m\varphi\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen} m\varphi);$$

ó de n trinomios de segundo, de esta otra:

$$x^2+2g^m\cos m\varphi\,.\,x+g^{2m};$$

ó de la siguiente, algo más breve y sencilla, si por f_m representamos el coeficiente del segundo término:

$$x^2+f_m x+g^{2m}.$$

De la igualdad

$$f_m=2g^m\cos m\varphi,$$

se desprenden inmediatamente tres importantes consecuencias:

1.ª Que el valor de f_m será, por regla general, inferior siempre al de $2g^m$.

2.ª Que, conforme m aumente, f_m podrá aumentar ó disminuir, sin propension ó tendencia hácia *límite* alguno determinado.

Y 3.ª Que, no sólo el valor absoluto, sino el *signo* de f_m, depende del valor de m, y puede variar, conforme varía y aumenta m, al parecer sin órden ni concierto.

Unicamente cuando $m\varphi$, por excepcion rarísima, fuere igual á π, ó á un múltiplo de π, ó de la semicircunferencia, el valor absoluto de f_m lo sería á $2g^m$: con la particularidad notable de que lo propio sucederá luégo cuando, en las transformadas sucesivas de la ecuacion propuesta, del exponente m pasemos al $2m$, ó al $4m$, etc., etc.: como si la primera transformada en que esto se verifica, en vez de dos raices imaginarías, correspondientes á las de la propuesta, contuviese dos raices reales, é iguales ambas á g^m. Pero, áun cuando f_m propenda entónces hácia el mismo límite que $2g^m$, su signo permanecerá indeterminado; y, por las incesantes variaciones del signo, inferiremos lo que en este caso excepcional sucede, y pudiera por de pronto confundirnos.

§. 11.

Composicion y análisis de la ecuacion del grado $2n$, cuyas raices son todas imaginarias.

Cuando suponíamos la ecuacion compuesta de n binomios de primer grado, de la forma

$$x+a,\ x+b,\ x+c,\ \ldots..$$

la representábamos abreviada y simbólicamente de este modo:

$$x^n+[a]\,x^{n-1}+[ab]\,x^{n-2}+\ldots\ldots+[ab\ldots k]\,x+ab\ldots k\,l=0.$$

Pues, suponiéndola ahora compuesta de n trinomios de 2.º grado, de la forma

$$x^2+fx+g^2,\ x^2+f'x+g'^2,\ x^2+f''x+g''^2,\ \ldots\ldots$$

tratemos de encontrar su expresion final, análoga á la precedente.—Para mayor claridad en este asunto, procederemos por partes, y procuraremos llegar al caso general y más complicado por induccion, ó exámen comparativo de lo que sucede en otros casos particulares y más sencillos.

Considerando primero el caso de constar la ecuacion propuesta de un sólo trinomio, y despues de dos, cuatro, seis, etc., etc., trinomios, de análoga forma todos, si se efectúa el producto de cuantos en cada caso se admitan, obtendremos las ecuaciones de 2.º, 4.º, 6.º, ... grados á que corresponden, y cuyos coeficientes escribimos á continuacion.

Ecuacion de 2.º grado... $C_0=1$
$C_1=f$
$C_2=g^2$

Id. de 4.º grado..... $C_0=1$
$C_1=[f]$
$C_2=[g^2]+ff'$
$C_3=[g^2f']$
$C_4=g^2g'^2$

Id. de 6.º grado..... $C_0=1$
$C_1=[f]$
$C_2=[g^2]+[ff']$
$C_3=[g^2f']+ff'f''$
$C_4=[g^2g'^2]+[g^2f'f'']$
$C_5=[g^2g'^2f'']$
$C_6=g^2g'^2g''^2$

Id. de 8.º grado..... $C_0=1$

$$C_1=[f]$$
$$C_2=[g^2]+[ff']$$
$$C_3=[g^2 f']+[ff' f'']$$
$$C_4=[g^2 g'^2]+[g^2 f' f'']+ff' f'' f'''$$
$$C_5=[g^2 g'^2 f'']+[g^2 f' f'' f''']$$
$$C_6=[g^2 g'^2 g''^2]+[g^2 g'^2 f'' f''']$$
$$C_7=[g^2 g'^2 g''^2 f''']$$
$$C_8=g^2 g'^2 g''^2 g'''^2.$$

Fácil sería, aunque bien escusado, traducir al castellano la regla de composicion de las diversas ecuaciones consideradas, en los precedentes símbolos contenida; y no ménos fácil penetrarse de su generalidad, ó posibilidad de su aplicacion á otros ejemplos más complicados.

¿Cuáles serán, en efecto, los coeficientes de la ecuacion del grado *décimo?*

Los de la de *octavo*, sucesivamente multiplicados por 1, por f^{IV}, y por $g^{IV\,2}$,—coeficientes del nuevo trinomio componente $x^2+f^{IV}x+g^{IV\,2}$,—y sumados unos con otros, ó dispuestos los productos parciales así obtenidos del siguiente modo:

Ecuacion del grado 10.º

$C_0=1$		
$C_1=[f]$	$+f^{IV}$	
$C_2=[g^2]+[ff']$	$+[f].f^{IV}$	$+g^{IV\,2}$
$C_3=[g^2 f']+[ff' f'']$	$+[g^2].f^{IV}+[ff']f^{IV}$	$+[f].g^{IV\,2}$
.....	.....	.....
.....	.....	.....

Y, hasta sin efectuar la suma de los tres grupos de términos así dispuestos, se concluye de la primera ojeada que la

ecuacion del grado 10.º obedece á la misma ley de composicion que las de los grados inferiores: ley generalizada y resumida de un modo bastante explícito en la expresion general siguiente de la ecuacion del grado $2n$:

$$
\begin{aligned}
(13)\quad & x^{2n} + [f]\,x^{2n-1} + \big([g^2] + [ff']\big)\,x^{2n-2} + \\
& \qquad + \big([g^2 f'] + [ff'f'']\big)\,x^{2n-3} + \\
& + \big([g^2 g'^2] + [g^2 f' f''] + ff'f''f'''\big)\,x^{2n-4} + \\
& + \big([g^2 g'^2 f''] + [g^2 f' f'' f'''] + [ff'f''f'''f^{\text{IV}}]\big)\,x^{2n-5} + \ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \big([g^2 g'^2 \ldots\ldots g^{(n-2)2}] + [g^2 g'^2 \ldots\ldots g^{(n-3)2} f^{n-2} f^{n-1}]\big)\,x^2 + \\
& + [g^2 g'^2 \ldots\ldots g^{(n-2)2} f^{n-1}]\,x + g^2 g'^2 \ldots\ldots g^{(n-1)2} = 0.
\end{aligned}
$$

En esta ecuacion general, como en las varias particulares, propuestas para su mejor y más pronta inteligencia, se advierte desde luego:

1.º Que todos los coeficientes son *homogéneos*, y todos los términos de su mismo grado, $2n$.

2.º Que los coeficientes equidistantes de los dos términos extremos son del mismo grado, variable con la posicion ó distancia, con respecto á las letras f.

Y 3.º Que en los coeficientes de órden ó lugar *impar* uno de los términos es *esencialmente positivo* é independiente de las f, ó de los segundos coeficientes de los trinomios de donde la ecuacion procede.

§. 12.

Transformacion de la ecuacion propuesta en otra cuyas raices sean las potencias m de las raices incógnitas.—Cálculo de los módulos.

Entre la ecuacion general, cuya composicion acabamos de inquirir y determinar, y aquella cuyas raices sean las potencias m de las raices de la primera, no hay más diferencia sino que la una procede de la multiplicacion de los trinomios

$$x^2+fx+g^2,\ x^2+f'x+g'^2,\ x^2+f''x+g''^2,\ \ldots\ldots;$$

y la otra de la multiplicacion de los siguientes:

$$x^2+f_m x+g^{2m},\ x^2+f'_m x+g'^{2m},\ x^2+f''_m x+g''^{2m},\ \ldots\ldots$$

Luego la transformada final de la ecuacion propuesta podrá inmediatamente escribirse de este modo:

$$(14)\quad x^{2n}+[f_m]\,x^{2n-1}+\left([g^{2m}]+f_m f'_m]\right)x^{2n-2}+$$
$$+\left([g^{2m}f'_m]+[f_m f'_m f''_m]\right)x^{2n-3}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+[g^{2m}g'^{2m}\ldots\ldots g^{(n-2)2m}f_m^{n-1}]\,x+$$
$$+g^{2m}g'^{2m}g''^{2m}\ldots\ldots g^{(n-1)2m}=0.$$

Veamos ahora en qué se convierte esta ecuacion cuando el exponente ó número m aumenta indefinidamente.

En los coeficientes de lugar *par*,—segundo, cuarto, etc.—ni un sólo término es independiente de las f_m; y como f_m, igual á $2g^m\cos m\varphi$, es cantidad variable, por regla gene-

ral, en magnitud y en signo, resulta que variables serán tambien en ambos conceptos los coeficientes mencionados. Por lo tanto, no hay que esperar simplificacion alguna de la última ecuacion, en cuanto á estos coeficientes *pares* se refiere, por mucho que m aumente; y el primer indicio, en la práctica, de que una ecuacion comprende sólo raices imaginarias, consistirá en la variabilidad irregular de los coeficientes ahora considerados, conforme de la ecuacion propuesta, por la regla del §. 3.°, aplicable á todos los casos, se fueren deduciendo otra y otras, cuyas raices sean los *cuadrados*, *cuartas potencias*, *octavas*, etc., etc., de las raices que se buscan.

Mas, por el contrario, suponiendo que los *módulos* sean propiamente desiguales y que

$$g > g' > g'' > \ldots\ldots,$$

los términos de lugar *impar*,—tercero, quinto, etc.—admiten muy notables simplificaciones. Para precisar las ideas fijémonos, por de pronto, en el primero de los citados, ó coeficiente, en la ecuacion (14), de la potencia $2n-2$ de x.

Este coeficiente,

$$[g^{2m}] + [f_m f'_m],$$

consta de dos partes.

La primera, $[g^{2m}]$, puede escribirse como sigue:

$$[g^{2m}] = g^{2m} + g'^{2m} + g''^{2m} + \ldots\ldots =$$

$$= g^{2m} \times \left\{ 1 + \left(\frac{g'}{g}\right)^{2m} + \left(\frac{g''}{g}\right)^{2m} + \ldots\ldots \right\};$$

y, así presentada, no admite duda que el *límite* hácia el cual propende, conforme aumenta m, se confunde con su primer término, g^{2m}.

La segunda parte del mismo coeficiente, $[f_m f'_m]$, es in-

ferior á la expresion análoga que se obtendria si, en vez de las f_m, pusiésemos en ella los valores extremos y como límites de estas cantidades, $2g^m$, y si considerásemos todos los términos componentes como positivos. En resolucion, y sin ningun género de duda:

$$[f_m f'_m] < 4\,[g^m g'^m].$$

Pero el límite de la suma $4\,[g^m g'^m]$, como el de la anterior $[g^{2m}]$, y por el mismo motivo, es igual á su primer término $4\,g^m g'^m$. Luego la suma $[f_m f'_m]$ podrá suponerse finalmente inferior á $4g^m g'^m$. Y, como la relacion de los dos términos, $4g^m g'^m$ y g^{2m}, se halla expresada por

$$4\left(\frac{g'}{g}\right)^m,$$

y esta relacion propende hácia *cero*, conforme el exponente m aumenta más y más, resulta que en el coeficiente total,

$$[g^{2m}] + [f_m f'_m],$$

el simple término g^{2m} será entonces el predominante, ó aquel en cuya comparacion todos los demás pueden considerarse como evanescentes y despreciables.

Análoga conclusion se deduce del análisis del coeficiente de la potencia $2n - 4$ de x:

$$[g^{2m} g'^{2m}] + [g^{2m} f'_m f''_m] + [f_m f'_m f''_m f'''_m].$$

Este coeficiente es, en efecto, inferior al que se obtendria si en los términos segundo y tercero las f_m se reemplazasen por sus límites superiores $2g^m$, y todas las partes componentes de aquellos términos, de signo en general dudoso y variable, se considerasen como positivas: inferior, en suma, á esta otra expresion analítica:

$$[g^{2m} g'^{2m}] + 4\,[g^{2m} g'^m g''^m] + 16\,[g^m g'^m g''^m g'''^m].$$

Pero el *límite* de esta última expresion, por ser $g > g' > g'' > g''' > \ldots\ldots$ se confunde con esta otra, mucho más sencilla:

$$g^{2m} g'^{2m} + 4 g^{2m} g'^{m} g''^{m} + 16 g^{m} g'^{m} g''^{m} g'''^{m};$$

equivalente á la que sigue:

$$g^{2m} g'^{2m} \times \left\{ 1 + 4 \left(\frac{g''}{g'} \right)^{m} + 16 \left(\frac{g'' g'''}{g g'} \right)^{m} \right\}.$$

Y, así presentado, conclúyese inmediatamente que este tal *límite* discrepará cada vez ménos, conforme aumente m, del sólo término $g^{2m} g'^{2m}$.

Sin grave complicacion ni variante alguna esencial, puede aplicarse el mismo razonamiento á todos los coeficientes análogos, ó de lugar *impar*, de la ecuacion (14); hasta deducir finalmente que dicha ecuacion, *límite* de todas las transformadas de la primitiva, se reduce á la que sigue: en la cual la letra f_0 representa un coeficiente cualquiera de lugar *par*, indeterminado en magnitud y en signo:

$$(15)\quad x^{2n} + f_0 x^{2n-1} + g^{2m} x^{2n-2} + f_0' x^{2n-3} + g^{2m} g'^{2m} . x^{2n-4} + \\ + f_0'' x^{2n-5} + g^{2m} . g'^{2m} . g''^{2m} x^{2n-6} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ f_0^{(n-1)} x + g^{2m} . g'^{2m} g''^{2m} \ldots\ldots g^{(n-1)2m} = 0.$$

Y obtenida esta ecuacion, que reemplaza á la (5) del Capítulo I, no hay que decir cómo se calcularán los n módulos buscados: por la misma regla que las raices reales, cuando la ecuacion propuesta sólo las contiene de esta especie: ó prescindiendo en la última transformada de los coeficientes de lugar *par;* dividiendo unos por otros,—el tercero por el segundo, el cuarto por el tercero, etc., etc.,—los de lugar *impar;* y extrayendo, por los procedimientos ordinarios de la Arit-

mética, de los cocientes resultantes las raices de índice $2m$, ó sólo del índice m si, como casi siempre sucede, basta conocer los *cuadrados* de aquellos módulos. Las varias advertencias consignadas en las páginas anteriores para facilitar en la práctica la investigacion de las raices reales, serán, pues, aplicables sin restriccion ó cortapisa á la determinacion de los módulos de las raices imaginarias.

§. 13.

Dificultad de resolver por completo, y en general, la ecuacion del grado 2n.—Advertencias útiles para la resolucion de las ecuaciones de cuarto y sexto grados.

Pero la descomposicion de la ecuacion propuesta en trinomios de *segundo* grado, ó la resolucion completa del problema que nos ocupa, exige algo más que el conocimiento de los terceros términos, $g^2, g'^2, g''^2, \ldots\ldots$, de aquellos trinomios: el de los coeficientes $f, f', f'', \ldots\ldots$, de los segundos términos. Veamos si esta última parte del problema es tan fácil de resolver como la anterior.

Si la ecuacion propuesta fuese de *cuarto* grado, segun lo en otro párrafo ya expuesto, podríamos representarla de este modo:

$$x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 =$$

$$x^4 + [f] x^3 + ([g^2] + ff') x^2 + [g^2 f'] x + g^2 g'^2 = 0.$$

Y de aquí inmediatamente se deduce que

$$C_1 = f + f' ,$$
$$C_3 = g^2 f' + g'^2 f ; \quad \text{y}$$

$$C_2 = g^2 + g'^2 + ff' .$$

De estas tres ecuaciones, suponiendo ya conocidos los cuadrados de los módulos g^2 y g'^2, las dos primeras servirán para hallar sencillísimamente los valores de f y f', y la tercera como medio de comprobacion de las operaciones numéricas efectuadas para despejar estas dos incógnitas. Determinados, pues, los módulos, la descomposicion de la ecuacion completa de *cuarto* grado en dos trinomios de *segundo* se reduce á la resolucion de dos muy sencillas ecuaciones de *primero*.

Si fuese la ecuacion propuesta de *sexto* grado, podríamos escribir por de pronto:

$$x^6 + C_1 x^5 + C_2 x^4 + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6 =$$

$$x^6 + [f] x^5 + ([g^2] + ff') x^4 + ([g^2 f'] + ff' f'') x^3 +$$

$$([g^2 g'^2] + [g^2 f' f'']) x^2 + [g^2 g'^2 f''] x + g^2 g'^2 g''^2 = 0.$$

E igualando unos con otros los coeficientes de las mismas potencias de x, en ambos miembros contenidos, nos resultaría entónces que

$$C_1 = [f]$$
$$C_5 = [g^2 g'^2 f'']$$

$$C_2 = [g^2] + [ff']$$
$$C_4 = [g^2 g'^2] + [g^2 f' f'']$$

$$C_3 = [g^2 f'] + ff' f''.$$

Las incógnitas en este caso son *tres:* f, f' y f''; y para determinarlas disponemos de *cinco* ecuaciones: dos de *primer* grado, dos de *segundo* y una de *tercero*.

Si de las dos primeras se deducen los valores de f y f', en funcion lineal de f'', y estos valores se sustituyen en la tercera, ésta se convertirá en una ecuacion de *segundo* grado, con la sola incógnita f'', de la cual dependerá la descomposicion en trinomios de la de *sexto* grado propuesta. Y las dos

ecuaciones restantes, de *segundo* y *tercer* grado, servirán para cerciorarse de la exactitud de los valores encontrados de f, f' y f'', que simultáneamente deben satisfacer á las cinco.

Mas conviene advertir que, siendo la ecuacion final, resultante de la eliminacion de f y f' en las tres primeras ecuaciones, de *segundo* grado con respecto á f'', dos serán los valores que á esta incógnita correspondan, y otros dos á las f y f' que de ella linealmente dependen. Y como la descomposicion de la ecuacion de *sexto* grado, en tres trinomios de *segundo*, correspondientes á los tres pares de raices conjugadas, debe ser única, el doble sistema de valores de f, f' y f'', introduce en el problema cierta indeterminacion ó vaguedad, molesta en la práctica.

Pues si de la ecuacion de *sexto* grado pasamos á la de *octavo*, mayores serán la dificultad é incertidumbre de esta especie que al resolverla encontremos.

Para hallar los valores de f, f', f'' y f''' dispondríamos entónces de siete ecuaciones: dos de *primer* grado, correspondientes á los coeficientes C_1 y C_7; dos de *segundo*, á los C_2 y C_6; dos de *tercero*, á los C_3 y C_5; y una de *cuarto*, al coeficiente central C_4. Prescindiendo de las tres últimas, ó considerándolas como simples ecuaciones de condicion, ó de comprobacion de los resultados que las cuatro primeras arrojaren, nos quedan cuatro ecuaciones todavía: dos de *primero* y dos de *segundo* grado, con cuatro incógnitas: las cuales, por la eliminacion de tres, se funden en una sola ecuacion de *cuarto* grado, con la incógnita restante f''', de cuyo valor dependen los de f, f' y f''.—La descomposicion en cuatro trinomios de la ecuacion de *octavo* grado depende, pues, en último extremo, de la resolucion de una ecuacion de *cuarto*, y de la eleccion entre los cuatro sistemas de valores de f, f', f'' y f''', que por su medio se obtuvieren, de aquel que propiamente satisface ó corresponde al ejemplo propuesto.

Como ventajosa podria tal vez considerarse aún la resolucion de la ecuacion de *octavo* grado por el método referido. Pero el vicio principal de semejante procedimiento y la necesidad de abandonarle por otro más sencillo y preciso se

descubren desde el momento en que tratamos de aplicarle á la descomposicion de la ecuacion del grado *décimo* en cinco trinomios reales de *segundo*.

De nueve ecuaciones, análogas á las en los casos anteriores analizadas, dispondríamos entónces: dos de *primer* grado; dos de *segundo;* dos de *tercero;* dos de *cuarto;* y una de *quinto*. Prescindiendo de las cuatro últimas y más complicadas, quedaríannos cinco, de *primero, segundo* y *tercer* grado. De las dos primeras deduciríamos los valores de f y f' en funcion lineal de f'', f''' y f^{iv}; y, sustituidos estos valores en las demás, tendríamos dos ecuaciones de *segundo* y una de *tercer* grado, con estas tres incógnitas restantes. La eliminacion de f'', por la combinacion recíproca de las dos primeras ecuaciones, y de una de las primeras con la tercera, transformaria el sistema de tres ecuaciones en otro de solas dos; una de *cuarto* grado, y otra de *sexto*, con las incógnitas f''' y f^{iv}. Y la eliminacion entre ambas ecuaciones de la f''', reduciria ó elevaria la dificultad á la resolucion de una ecuacion final del grado 24.—Lo que se presenta como muy sencillo y recomendable en la práctica, cuando la ecuacion propuesta es de *cuarto* grado; y se complica y embrolla un poco, cuando de *sexto;* y con dificultad puede aplicarse, cuando de *octavo;* desde el grado *décimo* en adelante es, si no absolutamente irrealizable y absurdo, complicadísimo é inconveniente á todas luces.

§. 14.

Regla de Newton para corregir los valores aproximados de los módulos, y áun de las mismas raices imaginarias, ya por cualquier procedimiento deducidos.

Dejando para el capítulo inmediato la exposicion del método general que debe preferirse para determinar los valores de f, que á los n trinomios corresponden, supongamos ahora que ya estos valores y los de g son conocidos con cierto gra-

do de aproximacion: con el que puede obtenerse, por ejemplo, empleando para calcularlos las tablas logarítmicas de solas cinco cifras decimales; y veamos cómo, obtenido este primer resultado, pueden luégo deducirse otro ú otros, cada vez ménos erróneos, ó ménos discrepantes de la verdad. El procedimiento para esto apénas difiere del que se explicó y empleó cuando, en el anterior capítulo, se trataba de corregir los valores aproximados de las raices reales; y, en sustancia, es siempre el primitivo y muy sencillo método de Newton. Exponiéndole, con las variantes de forma que necesariamente pide el cálculo de las raices imaginarias, completaremos el cuadro comparativo de las reglas que en la investigacion de ambas especies de raices deben observarse; y hasta demostraremos la casi identidad de tales reglas en ambos casos extremos.

Si, cuando x_0 representa un valor real muy aproximado de x, podemos, sin error de trascendencia, escribir la expresion siguiente:

$$(16) \qquad f(x) = f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + \Delta x_0 \,.\, f'(x_0) = 0,$$

de la cual inmediatamente se deduce el valor de la correccion buscada, Δx_0, lo mismo debe sernos permitido cuando x_0 posea la forma imaginaria, $\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}$. Porque la correccion en este segundo supuesto tendría tambien la forma análoga, $\Delta \alpha_0 + \Delta \beta_0 \sqrt{-1}$; y, en el desarrollo del polinomio $f(x_0 + \Delta x_0)$, con relacion á la *parte real* del segundo término, $\Delta x_0 \,.\, f'(x_0)$, serían despreciables las partes ó cantidades del mismo nombre de los términos sucesivos, por depender éstas de los cuadrados y potencias superiores de las cantidades, *reales* tambien y muy pequeñas, $\Delta \alpha_0$ y $\Delta \beta_0$; y los coeficientes del radical $\sqrt{-1}$, desde el tercero inclusive en adelante, igualmente lo serían, por idéntico motivo, con relacion al coeficiente del mismo radical en el segundo término del mencionado desarrollo. Luego, sea de la forma que quiera, si x_0 verdaderamente representa un valor aproximado de x, que deba satisfacer á la ecuacion $f(x) = 0$, siempre po-

dremos comenzar por escribir esta primera expresion, fundamental de cuanto sigue:

$$(17)\quad f(x_0+\Delta x_0)=f(x_0)+\Delta x_0 \,.\, f'(x_0)+\ldots=$$

$$[x_0^n]+[nx_0^n]\times\frac{\Delta x_0}{x_0}=[x_0^n]+[nx_0^n]\times\Delta\log x_0=0$$

Por otra parte: si el trinomio $x^2+f_0x+g_0^2$ comprende estas dos raices conjugadas

$$x_0=-g_0(\cos\varphi_0+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)\quad \text{y}$$

$$x_0'=-g_0(\cos\varphi_0-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)$$

y sucesivamente las sustituimos, en vez de x, en la ecuacion $f(x)=0$, que ahora supondremos, para simplicar un poco la escritura, del grado n, nos resultará que

$$[x_0{}^n]=f(x_0)=[(-g_0)^n\cos n\varphi_0]+[(-g_0)^n\,\mathrm{sen}\,n\varphi_0]\times\sqrt{-1}\quad \text{y}$$

$$[x_0'^n]=f(x_0')=[(-g_0)^n\cos n\varphi_0]-[(-g_0)^n\,\mathrm{sen}\,n\varphi_0]\times\sqrt{-1}$$

Y de análogo modo deduciremos, generalizando lo que en el §. 8.º se explicó, que

$$[nx_0{}^n]=[n(-g_0)^n\cos n\varphi_0]+[n(-g_0)^n\,\mathrm{sen}\,n\varphi_0]\times\sqrt{-1}\,;\quad \text{y}$$

$$[nx_0'^n]=[n(-g_0)^n\cos n\varphi_0]-[n(-g_0)^n\,\mathrm{sen}\,n\varphi_0]\times\sqrt{-1}$$

Suponiendo ahora, por brevedad, que

$$[(-g_0)^n\cos n\varphi_0]=P\cos Q,\quad \text{y}\quad [(-g_0)^n\,\mathrm{sen}\,n\varphi_0]=P\,\mathrm{sen}\,Q;$$

$$[n(-g_0)^n\cos n\varphi_0]=\rho\cos\psi,\quad \text{y}\quad [n(-g_0)^n\,\mathrm{sen}\,n\varphi_0]=\rho\,\mathrm{sen}\,\psi,$$

de la ecuacion (17) se concluye que

$$P\cos Q + P\,\mathrm{sen}\,Q\,.\sqrt{-1} +$$

$$\rho\,(\cos\psi + \mathrm{sen}\,\psi\,.\sqrt{-1}) \times \Delta\log x_0 = 0; \quad \text{y}$$

$$P\cos Q - P\,\mathrm{sen}\,Q\,.\sqrt{-1} +$$

$$\rho\,(\cos\psi - \mathrm{sen}\,\psi\,.\sqrt{-1}) \times \Delta\log x_0' = 0$$

Y de estas dos últimas ecuaciones, combinándolas una con otra por adicion y sustraccion, se desprenden las dos siguientes:

$$(18)\quad \begin{cases} 2P\cos Q + \rho\cos\psi\,(\Delta\log x_0 + \Delta\log x_0') + \\ \qquad \rho\,\mathrm{sen}\,\psi\,(\Delta\log x_0 - \log\Delta x_0')\sqrt{-1} = 0; \quad \text{y} \\ 2P\,\mathrm{sen}\,Q\,.\sqrt{-1} + \rho\cos\psi\,(\Delta\log x_0 - \Delta\log x_0') + \\ \qquad \rho\,\mathrm{sen}\,\psi\,(\Delta\log x_0 + \Delta\log x_0')\sqrt{-1} = 0 \end{cases}$$

En las últimas nuevas ecuaciones figuran en realidad como incógnitas la *suma* y la *diferencia* de las dos correcciones, $\Delta\log.\,x_0$ y $\Delta\log.\,x_0'$, correspondientes á los logaritmos de las raices conjugadas x_0 y x_0'; pero no son éstas las correcciones que ahora propiamente se buscan, sino las de los valores de g_0 y f_0, ó de g_0 y φ_0. Procuremos, pues, averiguar la dependencia que entre unas y otras existe, y si, por la sustitucion de aquellas por éstas, el sistema (18) admite alguna simplificacion notable.

Por de pronto sabemos que

$$\log x_0 = \log(-g_0) + \log(\cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)\,; \quad \text{y}$$

$$\log x_0' = \log(-g_0) + \log(\cos\varphi_0 - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)$$

Pero, representando por e la *base* del sistema de logaritmos *neperianos* ó naturales, que son los en este párrafo considerados hasta ahora, tambien puede admitirse como ya demostrado y sabido que

$$e^{\varphi_0\sqrt{-1}} = \cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_0; \quad \text{y}$$

$$e^{-\varphi_0\sqrt{-1}} = \cos\varphi_0 - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_0$$

Luego:

$$\log x_0 = \log(-g_0) + \varphi_0\sqrt{-1}; \text{ y } \log x_0' = \log(-g_0) - \varphi_0\sqrt{-1}$$

De donde, por transformaciones muy sencillas, se concluye finalmente que

$$(19)\quad \begin{cases} \Delta\log x_0 + \Delta\log x_0' = 2\,.\,\Delta\log g_0, & \text{y} \\ \Delta\log x_0 - \Delta\log x_0' = 2\sqrt{-1}\,.\,\Delta\varphi_0 \end{cases}$$

Mediante el sistema de ecuaciones (19), el (18) se convertirá en el que sigue:

$$(20)\quad \begin{cases} P\cos Q + \rho\cos\psi\,.\,\Delta\log g_0 - \rho\,\text{sen}\,\psi\,.\,\Delta\varphi_0 = 0\,, & \text{y} \\ P\,\text{sen}\,Q + \rho\,\text{sen}\,\psi\,.\,\Delta\log g_0 + \rho\cos\psi\,.\,\Delta\varphi_0 = 0\,. \end{cases}$$

Y de éste,—multiplicando la primera ecuacion por *cos* ψ y la segunda por *sen* ψ, y sumando uno con otro ambos productos; y volviéndolas luégo á multiplicar, por *sen* ψ la primera, y la segunda por *cos* ψ, y restando del último producto el anterior,—se obtienen los siguientes resultados:

$$(21)\quad \begin{cases} \Delta\log g_0 = \log\left(1+\dfrac{\Delta g_0}{g_0}\right) = \dfrac{\Delta g_0}{g_0} - \ldots\ldots = -\dfrac{P\cos(Q-\psi)}{\rho}\,; \\ \text{y} \\ \Delta\varphi_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\dfrac{P\,\text{sen}\,(Q-\psi)}{\rho} \end{cases}$$

Pàra deducir todavía de las correcciones Δg_0 y $\Delta \varphi_0$ la de f_0, Δf_0, basta recordar que

$$f_0 = 2g_0 \cos \varphi_0 .$$

Pues de esta última ecuacion, combinada con las dos (21), despreciando los cuadrados de Δg_0 y Δf_0, ó el producto de estas cantidades, se desprende esta otra:

$$(22) \qquad \Delta f_0 = 2\,(g_0 + \Delta g_0) \,.\, \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi_0) - 2g_0 \cos \varphi_0 = -\frac{2\,P g_0 \cos(Q - \psi + \varphi_0)}{\rho}$$

Y si á la correccion de f_0 se prefiere la de su logaritmo, $\Delta \log f_0$, fácilmente se hallará, despreciando las mismas potencias, segunda y superiores, de las correcciones análogas, Δg_0 y $\Delta \varphi_0$, ó sus productos, mediante la serie de transformaciones que á renglon seguido indicamos:

$$\log f_0 = \log 2 + \log g_0 + \log \cos \varphi_0 ; \qquad \text{y}$$

$$(23) \qquad \Delta \,.\, \log f_0 = \frac{\Delta g_0}{g_0} - \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\cos \varphi_0} \,.\, \Delta\varphi_0 = -\frac{P \cos(Q - \psi + \varphi_0)}{\rho \cos \varphi_0}$$

Y, por el contrario, si á la correccion de g_0 ó de su logaritmo, que la primera de las ecuaciones (21) suministra, prefiriésemos la del cuadrado del módulo, g_0^2, inmediatamente la deduciríamos de este modo:

$$(24) \qquad \Delta g_0^2 = 2g_0 \,.\, \Delta g_0 + \ldots\ldots = -2g_0^2 \,.\, \frac{P \cos(Q - \psi)}{\rho}$$

En resolucion: conocidos los valores aproximados g_0, φ_0 y f_0, para calcular las correcciones que les corresponden, se sustituirá en la ecuacion propuesta, del grado n, en vez de x, el valor *real* $-g_0$; y, multiplicando el primer término del polinomio

resultante por $\cos n\varphi_0$, el segundo por $\cos(n-1)\varphi_0$, etc., etc.; y, de análogo modo, el primero por $\operatorname{sen} n\varphi_0$, el segundo por $\operatorname{sen}(n-1)\varphi_0$, etc., etc., se obtendrán las *sumas*, simbólicamente representadas por $[(-g_0)^n \cos n\varphi_0]$ y $[(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0]$, respectivamente iguales á $P\cos Q$ y $P\operatorname{sen} Q$; de donde se deducirán los valores de estas cantidades auxiliares, P y Q. Y, con leve aumento de trabajo, y casi al propio tiempo, multiplicando cada término de los polinomios ó sumas anteriores por el exponente que en él posea la incógnita x, ó el módulo g_0 en su lugar sustituido, se calcularán las expresiones análogas $[n(-g_0)^n \cos n\varphi_0]$ y $[n(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0]$, iguales á $\rho\cos\psi$, la primera, y á $\rho\operatorname{sen}\psi$, la segunda: suficientes para deducir luégo los valores de las nuevas auxiliares ρ y ψ. Con estos antecedentes, el cálculo final de las correcciones buscadas, por medio de las fórmulas (21) á (24), sólo demanda un poco de atencion y conocimientos elementales y muy comunes de Trigonometría.—Cuando este cálculo hubiere de verificarse con auxilio de la primera de las fórmulas (21), ó de la (23), se cuidará de multiplicar previamente sus segundos miembros por M ($=0.4342945$), con objeto de convertir los logaritmos *neperianos* en *vulgares*.

§. 15.

Aplicacion á un ejemplo de la doctrina expuesta en los párrafos anteriores.

Apliquemos sin dilacion la doctrina en este capítulo expuesta á la resolucion de un ejemplo muy sencillo: no tanto, sin embargo, que, tratándole por cualquier otro procedimiento, no hubiese de parecernos complicado en demasía.

Sea la ecuacion de 4.° grado

$$(2^{\circ})\quad x^4+8x^3+13x^2+5x+100=0$$

Las dos primeras transformadas, deducidas inmediata ó directamente por la regla general del §. 3.°, son éstas:

$$(2^1)\quad x^4 + 38x^3 + 289x^2 - 2575x + 10^4 = 0; \quad \text{y}$$

$$(2^2)\quad x^4 + 866x^3 + 299221x^2 + 850625x + 10^8 = 0$$

Y, reemplazando los coeficientes de la última ecuacion por sus logaritmos, por la regla citada se obtendrán las que siguen, hasta la (2^5) inclusive:

$$(2^3)\quad x^4 + 2.9375179x^3 + 5.4759920x^2 + \\ + 5.9297382x + 8.0000000 = 0$$

$$(2^3)\quad x^4 + 5.1804533x^3 + 10.9457635x^2 - \\ - 13.7717388x + 16.0000000 = 0$$

$$(2^4)\quad x^4 - 11.1862877x^3 + 21.8925258x^2 + \\ + 27.2380574x + 32.0000000 = 0$$

$$(2^5)\quad x^4 + 21.9012523x^3 + 43.7850555x^2 + \\ + 54.1557932x + 64.0000000 = 0$$

En la primera transformada, (2^1), el coeficiente de x,—segundo de los *pares*,—nos ha resultado *negativo:* lo cual prueba que no todas las raices de la propuesta son reales (§. 9.°). En la (2^2) el mismo coeficiente es *positivo; negativo*, por el contrario, en la (2^3); y *positivo* otra vez en la (2^4): su indeterminacion *en signo* no puede ser más manifiesta. Pues *en valor* le sucede lo propio: como lo acredita la misma incertidumbre ó variabilidad del *signo*, procedente de la gran influencia que, en el paso de una transformada á otra, ejerce sobre el *cuadrado* de este coeficiente el *doble producto* (§. 3.°) de los dos que inmediatamente le preceden y siguen.

Con el coeficiente de x^3,—primero de los *pares*,—acontece una cosa parecida. *Positivo* en la ecuacion propuesta y

en sus dos primeras transformadas, en la cuarta (2^4) resulta *negativo, positivo* en la (2^5), y *negativo* en la (2^6), que por innecesaria se ha omitido.

Pero, en cambio, los coeficientes de x^0 y x^2 se conservan siempre *positivos*, y convergen con gran rapidez hácia *límites* determinados, ó hácia valores independientes de los demás coeficientes de la ecuacion. Ni áun cuando los cálculos se hubiesen efectuado con logaritmos de *diez* cifras decimales, discreparía el coeficiente de x^2 en la (2^6) del simple *duplo* del mismo coeficiente en la transformada anterior, (2^5).—La operacion, verdaderamente difícil ó penosa, concluye, pues, en esta última transformada. De la cual inmediatamente se desprende que

$$\log\ (g^2)^{2^5} = 43.7850555 \quad \text{y}$$

$$\log (g^2 g'^2)^{2^5} = 64.0000000$$

O: $\log g^2 = 1.3682830$, y $\log g'^2 = 0.6317170$; y

$$g^2 = 23.34979 \qquad g'^2 = 4.28269$$

Conocidos los valores de g^2 y g'^2,—cuadrados de los módulos,—facilísimo es en este caso hallar los de f y f'.

En efecto: de la expresion

$$(x^2+fx+g^2)\,(x^2+f'x+g'^2) = x^4+8x^3+13x^2+5x+100,$$

se concluye que

$$f+f' = 8, \quad \text{y} \quad g^2 f' + g'^2 f = 5, \quad \text{ó}$$

$$f = 9.53466, \quad \text{y} \quad f' = -1.53466$$

Con los valores encontrados, de g^2, g'^2, f y f', el producto de los dos trinomios de 2.° grado, en vez de coincidir exactamente con el primer miembro de la ecuacion propuesta, corresponde á esta otra ecuacion, muy poco discrepante:

$$x^4 + 8.00000\,x^3 + 13.00003\,x^2 + 5.00000\,x + 99.99991 = 0$$

Mayor grado de aproximacion que el obtenido desde luégo, ú operando directamente con logaritmos de *siete* cifras decimales, sería muy difícil conseguir, ni con auxilio de las fórmulas (21) á (24), ni por ningun otro medio. Para presentar, sin embargo, un ejemplo de la aplicacion de que las citadas fórmulas son susceptibles, supondremos que g^2 y f se han calculado por de pronto con logaritmos de solas cinco cifras decimales,—lo cual abrevia en gran manera las transformaciones de la ecuacion propuesta, explicadas en los §§. 3.° y siguientes;—y que, mediante las fórmulas (22) y (24) se desea luégo prolongar la aproximacion hasta donde el uso de las tablas logarítmicas de siete cifras lo permita.

Sean, pues,

$$g^2 = 23.350; \quad \text{y} \quad f = 9.535$$

Y de la fórmula $f = 2g \cos \varphi$ deduciremos que $\varphi = 9^\circ\, 23'\, 7''\, 4$.

Con estos datos y antecedentes pasemos ahora á calcular los diversos términos de las expresiones simbólicas $[(-g)^4 \cos 4\varphi]$ y $[(-g)^4 \operatorname{sen} 4\varphi]$, correspondientes á la ecuacion propuesta y que tratamos de resolver. Los resultados, supliendo mentalmente el término conocido, 100, de la misma ecuacion, que pertenece al primer grupo, son éstos:

$$\begin{aligned}
-5g \cos \varphi &= -\ 23.83750 \\
+13g^2 \cos 2\varphi &= +287.40523 \\
-8g^3 \cos 3\varphi &= -795.83636 \\
+g^4 \cos 4\varphi &= +432.31320 \\
\hline
[(-g)^4 \cos 4\varphi] = P \cos Q &= +\ \ 0.04457 \\
\hline
-5g \operatorname{sen} \varphi &= -\ \ 3.94003 \\
+13g^2 \operatorname{sen} 2\varphi &= +\ 97.67720 \\
-8g^3 \operatorname{sen} 3\varphi &= -425.94030 \\
+g^4 \operatorname{sen} 4\varphi &= +332.22408 \\
\hline
[(-g)^4 \operatorname{sen} 4\varphi] = P \operatorname{sen} Q &= +\ \ 0.02095
\end{aligned}$$

Si el primer término del grupo $[(-g)^4 \cos 4\varphi]$ y el del $[(-g)^4 \operatorname{sen} 4\varphi]$, se multiplican por 1, el segundo por 2, por 3 el tercero, y el último por 4, y se suman los dos grupos de productos así obtenidos, sin prescindir de los signos, encontraremos estos otros resultados:

$$[4\,(-g)^4 \cos 4\varphi] = \rho \cos \psi = -107.28332; \quad \text{y}$$

$$[4\,(-g)^4 \operatorname{sen} 4\varphi] = \rho \operatorname{sen} \psi = +242.48979$$

Para encontrar ahora los valores de P y Q, y de ρ y ψ, el procedimiento es sencillísimo, como demuestra el adjunto cuadro de operaciones efectuadas:

$$\begin{aligned}
\log.\, P \operatorname{sen} Q &= 8.3211840 \\
\log.\, P \cos Q &= 8.6490426 \\
\hline
\log.\, \operatorname{tang} Q &= 9.6721414 \\
\hline
Q &= 25^\circ\, 10'\, 32''.7 \\
\hline
\log.\, \cos Q &= 9.9566520 \\
\hline
\log P &= 8.6923906
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\, \rho \operatorname{sen} \psi &= 2.3846934 \\
\log.\, \rho \cos \psi &= 2.0305322\ n \\
\hline
\log.\, \operatorname{tang} \psi &= 0.3541612\ n \\
\hline
\psi &= 113^\circ\, 51'\, 56''.7 \\
\hline
\log.\, \cos \psi &= 9.6070205\ n \\
\hline
\log \rho &= 2.4235117
\end{aligned}$$

Y obtenidos estos valores, los de Δg^2 y Δf, calculables

por las fórmulas (22) y (24), se deducirán con no menor sencillez del modo que á continuacion se indica:

$$Q = 25^\circ\ 10'\ 32''.7$$
$$\psi = 113\ \ 51\ \ 56\ .7$$
$$Q - \psi = -88\ \ 41\ \ 24\ .0$$
$$\varphi = 9\ \ 23\ \ 7\ .4$$
$$Q - \psi + \varphi = -79\ \ 18\ \ 16\ .6$$

$$(24)\quad \begin{cases} \log \dfrac{2P}{\rho} = 6.56991 \\ \log \cos (Q - \psi) = 8.35911 \\ \log g^2 = 1.36829 \end{cases}$$

$$\log \Delta g^2 = 6.29731\ n$$
$$\Delta g^2 = -\ 0.000198$$
$$g^2 = +\ 23.350$$
$$g_1\ (g^2 \text{ corregido}) = +\ 23.349802$$

$$(22)\quad \begin{cases} \log \dfrac{2P}{\rho} = 6.56991 \\ \log \cos (Q - \psi + \varphi) = 9.26855 \\ \log g = 0.68414 \end{cases}$$

$$\log \Delta f = 6.52260\ n$$
$$\Delta f = -\ 0.000333$$
$$f = +\ 9.535$$
$$f_1\ (f \text{ corregido}) = +\ 9.534667$$

Los valores corregidos de g^2 y de f concuerdan con los obtenidos por la aplicacion directa del método, operando desde un principio con logaritmos de siete cifras decimales. Y del propio modo podrían corregirse los de g'^2 y f', si por de pronto los supusiésemos respectivamente iguales á 4,283 y —1,535. Pero ¡de cuántas piedrezuelas está sembrado este último tortuoso camino, y cuán fácil es tropezar y caer en él á lo mejor! Pruébese á recorrerle y se verá que no exageramos.

Resulta, pues, en conclusion, que las fórmulas (21) á (24), tan ingeniosamente construidas y tan dignas de estudio en teoría, por excepcion únicamente será menester emplearlas en la práctica. Tanta es, en efecto, la eficacia del procedimiento general de resolucion de las ecuaciones numéricas en estos dos capítulos explicado, que apénas se necesita para nada lo que, con respecto á distintos y más famosos y celebrados métodos, debe considerarse como complemento indispensable.

CAPITULO III.

Descomposicion en trinomios reales de segundo grado de la ecuacion cuyas raices son todas imaginarias.

§. 16.

Condiciones que debe reunir el verdadero método de resolver el problema.

Sabiendo ya, por lo expuesto en el capítulo precedente, cómo pueden determinarse los n módulos de las $2n$ raices imaginarias conjugadas de una ecuacion, que sólo contiene raices de esta especie, fáltanos todavía, para dar por resuelta la ecuacion, ó para descomponerla por completo en trinomios reales de segundo grado, averiguar cuáles son los n valores de f, — coeficientes de los segundos términos de aquellos trinomios, — que á los citados n módulos corresponden. En los casos más sencillos tambien queda dicho (§. 13) cómo puede esto verificarse; pero las dificultades, de índole teórica y práctica, con que entónces tropezamos, nos obligan á considerar de nuevo el mismo asunto desde otro punto de vista, mucho más amplio y general.

Procedimiento irreprochable en teoría, para conseguir el fin que ahora nos proponemos, sería aquél en que cada valor de f dependiese sin ambigüedad del correspondiente de g ó de g^2, y en que semejante valor, definido ya el de g^2, se desprendiese de la resolucion de una ecuacion auxiliar, del grado n á lo sumo, suponiendo que la propuesta lo fuese del $2n$. Esta ecuacion auxiliar, cuyos coeficientes dependerán del valor que á un módulo cualquiera se atribuya, y cuya verdadera incógnita será la f, correspondiente al módulo

considerado, no puede, por regla general, ser de grado inferior al n; porque, si todos los *módulos* resultasen *iguales*, conservándose *desiguales* las f, al mismo valor de g^2 corresponderían n valores distintos de f; y estos n valores deberían proceder entónces de la sola ecuacion auxiliar, forzosamente de este grado.

Mas, si en vez de *una*, tuviésemos *dos* ecuaciones auxiliares, cuyos coeficientes dependiesen del valor, g^2, de un módulo; ambas con la incógnita comun, f, que del mismo módulo depende; y cuyos grados fuesen n y otro cualquiera inferior á n, — determinando, por el procedimiento del máximo comun divisor de dos polinomios, cuáles son el factor ó los factores comunes que necesariamente deben poseer, conseguiríamos resolver por completo el problema propuesto, ó reducir su dificultad á otra menor y más fácil de eludir.

Estas dos ecuaciones, cuya existencia se columbra en lontananza, y de las cuales depende la resolucion perfecta de la ecuacion general del grado $2n$, con otras tantas raices imaginarias, pueden obtenerse como sigue.

§. 17.

Realízanse las condiciones expuestas en el párrafo precedente.

Sea la ecuacion propuesta:

$$(25) \qquad x^{2n} + \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} + \ldots\ldots + \alpha_{2n} = o;$$

y representemos un *par* cualquiera de sus raices imaginarias conjugadas por la expresion

$$x_0 = g_0(\cos\varphi_0 \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)$$

Por la sustitucion sucesiva de estos dos valores de x en la ecuacion (25) se obtienen dos ecuaciones distintas: las cua-

les, sumadas una con otra, y restada de la primera la segunda, se convierten en las que siguen:

$$g_0^{2n}\cos 2n\varphi_0+\alpha_1 g_0^{2n-1}\cos(2n-1)\varphi_0+\alpha_2 g_0^{2n-2}\cos(2n-2)\varphi_0+$$
$$\ldots+\ldots\ldots+\alpha_{2n-1}g_0\cos\varphi_0+\alpha_{2n}=o;$$

$$g_0^{2n}\operatorname{sen}2n\varphi_0+\alpha_1 g_0^{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\varphi_0+\alpha_2 g_0^{2n-2}\operatorname{sen}(2n-2)\varphi_0+$$
$$\ldots+\ldots\ldots+\alpha_{2n-1}g_0\operatorname{sen}\varphi_0=o$$

Si la primera de estas ecuaciones se multiplica por $\cos n\varphi_0$ y la segunda por $\operatorname{sen} n\varphi_0$, y se suman luégo uno con otro los productos asi obtenidos; y si despues se multiplica la primera por $\operatorname{sen} n\varphi_0$ y por $\cos n\varphi_0$ la segunda, y del último producto se resta el anterior, las habremos transformado en estas otras:

$$g_0^{2n}\cos n\varphi_0+\alpha_1 g_0^{2n-1}\cos(n-1)\varphi_0+\alpha_2 g_0^{2n-2}\cos(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots$$
$$+\alpha_{2n-2}g_0^2\cos(n-2)\varphi_0+\alpha_{2n-1}g_0\cos(n-1)\varphi_0+\alpha_{2n}\cos n\varphi_0=o;$$

$$g_0^{2n}\operatorname{sen}n\varphi_0+\alpha_1 g_0^{2n-1}\operatorname{sen}(n-1)\varphi_0+\alpha_2 g_0^{2n-2}\operatorname{sen}(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots$$
$$-\alpha_{2n-2}g_0^2\operatorname{sen}(n-2)\varphi_0-\alpha_{2n-1}g_0\operatorname{sen}(n-1)\varphi_0-\alpha_{2n}\operatorname{sen}n\varphi_0=o:$$

en las cuales los términos equidistantes de los extremos contienen los mismos *senos* y *cosenos* de φ_0 y de los múltiplos de este arco. Ordenándolas, pues, con relacion á las mencionadas líneas trigonométricas, podrán escribirse de este nuevo modo:

$$(g_0^{2n}+\alpha_{2n})\cos n\varphi_0+(\alpha_1 g_0^{2n-1}+\alpha_{2n-1}g_0)\cos(n-1)\varphi_0+$$
$$+(\alpha_2 g_0^{2n-2}+\alpha_{2n-2}g_0^2)\cos(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots=o;$$

$$(g_0^{2n}-\alpha_{2n})\operatorname{sen}n\varphi_0+(\alpha_1 g_0^{2n-1}-\alpha_{2n-1}g_0)\operatorname{sen}(n-1)\varphi_0+$$
$$+(\alpha_2 g_0^{2n-2}-\alpha_{2n-2}g_0^2)\operatorname{sen}(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots=o$$

Y si ahora suponemos que

$$(26)\qquad \left.\begin{array}{ll} 1+\alpha_{2n}\,g_0^{-2n} & =\beta \\ \alpha_1+\alpha_{2n-1}\,g_0^{-2n+2} & =\beta_1 \\ \alpha_2+\alpha_{2n-2}\,g_0^{-2n+4} & =\beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \alpha_{n-1}+\alpha_{n+1}\,g_0^{-2} & =\beta_{n-1} \\ \alpha_n\quad+\alpha_n & =\beta_n \end{array}\right\},\ \text{y}\qquad (27)\qquad \left.\begin{array}{ll} 1-\alpha_{2n}\,g_0^{-2n} & =\gamma \\ \alpha_1-\alpha_{2n-1}\,g_0^{-2n+2} & =\gamma_1 \\ \alpha_2-\alpha_{2n-2}\,g_0^{-2n+4} & =\gamma_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \alpha_{n-1}-\alpha_{n+1}\,g_0^{-2} & =\gamma_{n-1} \end{array}\right\},$$

siendo $\beta, \beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \ldots\ldots$ *funciones* bien definidas de los coeficientes, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots$, de la ecuacion propuesta y de un *módulo* cualquiera, g_0, correspondiente á un *par* de raices imaginarias, y que debe considerarse como ya conocido, —las dos ecuaciones en que la primitiva (25) se ha descompuesto podrán escribirse abreviadamente como sigue:

$$(28)\quad \beta\cos n\varphi_0+\frac{\beta_1}{g_0}\cos(n-1)\varphi_0+\frac{\beta_2}{g_0^2}\cos(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots$$
$$+\frac{\beta_{n-1}}{g_0^{n-1}}\cos\varphi_0+\frac{\beta_n}{g_0^n}=0;\ \text{y}$$

$$(29)\quad \gamma\,\text{sen}\,n\varphi_0+\frac{\gamma_1}{g_0}\text{sen}(n-1)\varphi_0+\frac{\gamma_2}{g_0^2}\text{sen}(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots$$
$$+\frac{\gamma_{n-2}}{g_0^{n-2}}\text{sen}\,2\varphi_0+\frac{\gamma_{n-1}}{g_0^{n-1}}\text{sen}\,\varphi_0=0$$

Los *senos* y *cosenos* de los arcos múltiples de φ_0 pueden eliminarse de estas ecuaciones, ó ser reemplazados en ambas por

el solo *coseno* de φ_0, elevado, cuando más, á la potencia n, con auxilio de las siguientes fórmulas (*):

$$\cos n\varphi_0 = 2^{n-1}\cos^n\varphi_0 - M_1 2^{n-3}\cos^{n-2}\varphi_0 + M_2 2^{n-5}\cos^{n-4}\varphi_0 - \ldots;$$

$$\frac{\operatorname{sen} n\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi_0} = 2^{n-2}\cos^{n-1}\varphi_0 - N_1 2^{n-3}\cos^{n-3}\varphi_0 + N_2 2^{n-5}\cos^{n-5}\varphi_0 - \ldots$$

En las cuales los coeficientes M_1, M_2, M_3 ..., N_1, N_2, N_3 ..., representan lo que sigue:

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = \dfrac{n}{1} \\[2ex] M_2 = \dfrac{n(n-3)}{1.2} \\[2ex] M_3 = \dfrac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} N_1 = \dfrac{n-2}{1} \\[2ex] N_2 = \dfrac{(n-3)(n-4)}{1.2} \\[2ex] N_3 = \dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Ó, en general:

$$M_p = \frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p}; \text{ y}$$

$$N_p = \frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p)}{1.2.3\ldots p}.$$

El primer término de la ecuacion (28), despues de verificada la eliminacion ó sustitucion de líneas trigonométricas que se acaba de indicar, se convertirá en un polinomio,

(*) Consúltese sobre este punto una de las adiciones insertas al final de la *Memoria*.

ordenado con relacion á las potencias decrecientes de $\cos\varphi_0$, á contar desde la n; el segundo en otro del grado $n-1$; y así los demás consecutivos. Por resultado final obtendremos, pues, una nueva ecuacion ó polinomio del grado n, con la sola incógnita $\cos\varphi_0$. Y en otra ecuacion del grado $n-1$, con la misma incógnita, se nos convertirá la (29), por resultado de una serie análoga de sustituciones y transformaciones.

Mas recordemos que no es el valor de $\cos\varphi_0$ lo que propiamente necesitamos y buscamos, despues de conocido el módulo g_0 ó su cuadrado, para deducir las dos raices conjugadas, á este módulo correspondientes; sino el de f_0, segundo coeficiente del trinomio $x^2+f_0x+g_0^2$. Pues bien: como, segun ya mas atrás se explicó, $f_0=-2g_0\cos\varphi_0$, para deducir de las ecuaciones transformadas (28) y (29) otras dos, en las cuales sea f_0 la incógnita y no $\cos\varphi_0$, basta multiplicar sus segundos coeficientes por $(-2g_0)$, los terceros por $(-2g_0)^2$, los cuartos por $(-2g_0)^3$, y así los demás hasta llegar al último, que deberá multiplicarse por $(-2g_0)^n$ en la (28), y por $(-2g_0)^{n-1}$ en la (29).

Efectuadas estas varias operaciones,—largas, sí, pero de ninguna manera difíciles ni de penosa comprension,— obtiénense las dos siguientes ecuaciones finales, de construccion mucho más sencilla y regular de lo que *à priori* podíamos figurarnos:

(30)

$$\left.\begin{array}{l}
\beta f_0^n-\beta_1 f_0^{n-1}+\beta_2 f_0^{n-2}-\beta_3 f_0^{n-3}+\ldots\pm\beta_n \\
-g_0^2\{M_1\beta f_0^{n-2}-M_1'\beta_1 f_0^{n-3}+M_1''\beta_2 f_0^{n-4}-\ldots\} \\
+g_0^4\{M_2\beta f_0^{n-4}-M_2'\beta_1 f_0^{n-5}+M_2''\beta_2 f_0^{n-6}-\ldots\} \\
-g_0^6\{M_3\beta f_0^{n-6}-M_3'\beta_1 f_0^{n-7}+M_3''\beta_2 f_0^{n-8}-\ldots\} \\
+g_0^8\{M_4\beta f_0^{n-8}-M_4'\beta_1 f_0^{n-9}+M_4''\beta_2 f_0^{n-10}-\ldots\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}=0;\ \text{y}$$

(31)

$$\left.\begin{array}{l}
\gamma f_0^{n-1} - \gamma_1 f_0^{n-2} + \gamma_2 f_0^{n-3} - \gamma_3 f_0^{n-4} + \ldots \pm \gamma_{n-1} \\
- g_0^2 \{ N_1 \gamma f_0^{n-3} - N_1' \gamma_1 f_0^{n-4} + N_1'' \gamma_2 f_0^{n-5} - \ldots \} \\
+ g_0^4 \{ N_2 \gamma f_0^{n-5} - N_2' \gamma_1 f_0^{n-6} + N_2'' \gamma_2 f_0^{n-7} - \ldots \} \\
- g_0^6 \{ N_3 \gamma f_0^{n-7} - N_3' \gamma_1 f_0^{n-8} + N_3'' \gamma_2 f_0^{n-9} - \ldots \} \\
+ g_0^8 \{ N_4 \gamma f_0^{n-9} - N_4' \gamma_1 f_0^{n-10} + \ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} = 0.$$

Consta la ecuacion (30) de $^1/_2(n+2)$, ó de $^1/_2(n+1)$, polinomios, segun que n sea número *par* ó *impar*, respectivamente de los grados $n, n-2, n-4 \ldots\ldots$ y $n-n$, ó $n-n+1$, ordenados todos con relacion á la incógnita f_0.

En los primeros términos de estos diversos polinomios figura como factor la β; en el segundo la β_1; en el tercero la β_2; etc., etc.: de manera que todos ellos pueden considerarse tambien como ordenados con respecto á la β y á sus *índices* consecutivos.

Los *signos* varían regularmente del $+$ al $-$, y vice-versa, tanto en el paso de un polinomio á otro, como en el de los términos de un mismo polinomio.

Como se hallan ordenados estos términos con relacion á los *exponentes* de f_0 ó á los *índices* de β, así lo están los polinomios sucesivos con relacion á las potencias *pares* de g_0.

Los coeficientes M_1, M_2, M_3 ... son los mismos, poco ántes ya consignados, y que de la expresion general M_p sencillamente se desprenden, poniendo por p el valor ó *subíndice* que les corresponda.

Y de los M_1, M_2, M_3 ... se deducen los M_1', M_2', M_3' ...; de éstos los M_1'', M_2'', M_3'' ... ; y, en general, los señalados con varios acentos de los que inmediatamente les preceden, ó llevan un acento ménos y subíndices iguales, poniendo en és-

tos por n la expresion $n - 1$. Si, por ejemplo, M_2 es igual á $\frac{n(n-3)}{1.2}$, M_2' lo será á $\frac{(n-1)(n-4)}{1.2}$; M_2'' á $\frac{(n-2)(n-5)}{1.2}$; M_2''' á $\frac{(n-3)(n-6)}{1.2}$; y así todos los demás consecutivos y análogos. Resultados que tambien pueden obtenerse poniendo sucesivamente en la expresion de M_p, por n, las cantidades inferiores $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$ ... .

Con estas advertencias facilísimo será completar la ecuacion (30), ó escribir desde luégo en cualquier caso particular la ecuacion auxiliar del grado n, con respecto á f_0, de la cual depende la solucion completa de la propuesta, del grado duplo.

Pues la construccion de la otra ecuacion auxiliar (31) se halla sometida á reglas análogas á las que se acaban de exponer muy al por menor.

El número de sus polinomios componentes, ordenados con relacion á la letra f, es igual á $\frac{1}{2}n$, ó $\frac{1}{2}(n+1)$, segun que n es número *par* ó *impar*.

Los *signos* varían del propio modo que en el caso anterior.

Y los *coeficientes*, que dependen de la letra n, se desprenden unos de otros tambien por la misma regla.

Lo mismo que la ecuacion (30), la (31) podrá, pues, escribirse inmediatamente en cuantos casos particulares se presentaren en la práctica, prescindiendo por completo en ambas de los largos razonamientos y multiplicadas transformaciones que para deducirlas de la ecuacion (25), y demostrar su exactitud, ha sido menester verificar.

§. 18.

Aplícanse las fórmulas generales del párrafo anterior á los casos primeros y más sencillos.

Como aplicacion y aclaracion de cuanto precede, atribuyamos ahora á la letra n los valores sucesivos 2, 3, 4 y 5, y veamos en qué se convierten entónces las ecuaciones finales (30)

y (31): los resultados que se obtuvieren corresponderán á las ecuaciones de cuarto, sexto, octavo y décimo grados, cuyas raíces sean todas imaginarias, y podrán aplicarse desde luégo á la resolucion completa de tales ecuaciones. Estos cuatro casos particulares del problema general que nos hemos propuesto resolver son de grande importancia y merecen especial estudio.

Ecuacion de cuarto grado.

Coeficientes propios de la misma: α_1, α_2, α_3 y α_4.

Los coeficientes auxiliares, β, β_1 y β_2 y los γ y γ_1, que figuran en las ecuaciones (30) y (31), se determinarán por las siguientes fórmulas, que de los grupos (26) y (27) se desprenden:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \alpha_4 g_0^{-4} &= \beta \\ \alpha_1 + \alpha_3 g_0^{-2} &= \beta_1 \\ \alpha_2 + \alpha_2 \quad &= \beta_2 \end{aligned}\right\} \text{ y } \qquad \left.\begin{aligned} 1 - \alpha_4 g_0^{-4} &= \gamma \\ \alpha_1 - \alpha_3 g_0^{-2} &= \gamma_1 \end{aligned}\right\}$$

Y las dos ecuaciones finales en que las (30) y (31) se convierten en este caso particular son las siguientes:

$$(a) \qquad 0 = \beta f_0^2 - \beta_1 f_0 + (\beta_2 - 2\beta g_0^2); \text{ y}$$

$$(b) \qquad 0 = \gamma f_0 - \gamma_1$$

De la segunda de estas dos ecuaciones se deducirá el valor de f_0, correspondiente al módulo g_0; y la primera servirá como ecuacion de condicion, para cerciorarse de la exactitud del resultado final, y, por lo tanto, de las varias operaciones numéricas efectuadas para obtenerle. Si los dos módulos de la ecuacion de cuarto grado fuesen iguales, siendo iguales ó desiguales las cuatro raices imaginarias, al mismo número g_0 corresponderían dos valores, iguales ó distintos, de f_0, que se deducirían de la ecuacion (a). Y la (b) sería entónces la ecua-

cion condicional á que los diversos resultados obtenidos deberían satisfacer.

Ecuacion de sexto grado.

Coeficientes propios: α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 y α_6.
Coeficientes auxiliares:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\alpha_6 g_0^{-6}=\beta \\ \alpha_1+\alpha_5 g_0^{-4}=\beta_1 \\ \alpha_2+\alpha_4 g_0^{-2}=\beta_2 \\ \alpha_3+\alpha_3 \quad =\beta_3 \end{array}\right\}, \text{ y } \left.\begin{array}{l} 1-\alpha_6 g_0^{-6}=\gamma \\ \alpha_1-\alpha_5 g_0^{-4}=\gamma_1 \\ \alpha_2-\alpha_4 g_0^{-2}=\gamma_2 \end{array}\right\}$$

Ecuaciones finales, deducidas de las (30) y (31);

$$(a') \quad 0=\beta f_0^3-\beta_1 f_0^2+(\beta_2-3\beta g_0^2)\, f_0-(\beta_3-2\beta_1 g_0^2); \text{ y}$$

$$(b') \quad 0=\gamma f_0^2-\gamma_1 f_0 \;+(\gamma_2-\gamma g_0^2)$$

Las dos últimas ecuaciones deben poseer, cuando ménos, una raiz comun, y, por lo tanto, un comun divisor: de primer grado, si los tres módulos son distintos; y de segundo, —el mismo polinomio (b'),— si existen dos módulos iguales. Cuando lo sean los tres, habrá, pues, que resolver la ecuacion (a') para hallar los valores correspondientes de f_0; cuando solos dos, la (b'); y cuando los tres módulos sean distintos, como por regla general debe suceder, se dividirá el polinomio (a') por el (b'), hasta obtener un resíduo de primer grado: y de este resíduo, igualado á *cero*, y considerado como factor comun de ambos polinomios, se deducirá el valor de f_0, correspondiente al de g_0, que en los antecedentes y curso del cálculo se hubiere empleado.—Para comprobar la exactitud de los resultados que se obtengan pueden servir las mismas dos ecuaciones (a') y (b').

Ecuacion de octavo grado.

Coeficientes propios: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_8$.
Coeficientes auxiliares:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \alpha_8 g_0^{-8} = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_7 g_0^{-6} = \beta_1 \\ \alpha_2 + \alpha_6 g_0^{-4} = \beta_2 \\ \alpha_3 + \alpha_5 g_0^{-2} = \beta_3 \\ \alpha_4 + \alpha_4 \quad = \beta_4 \end{array}\right\}, \text{ y } \left.\begin{array}{l} 1 - \alpha_8 g_0^{-8} = \gamma \\ \alpha_1 - \alpha_7 g_0^{-6} = \gamma_1 \\ \alpha_2 - \alpha_6 g_0^{-4} = \gamma_2 \\ \alpha_3 - \alpha_5 g_0^{-2} = \gamma_3 \end{array}\right\}.$$

Ecuaciones finales:

$$(a'')\ 0 = \beta f_0^4 - \beta_1 f_0^3 + (\beta_2 - 4\beta g_0^2) f_0^2 - (\beta_3 - 3\beta_1 g_0^2) f_0 + (\beta_4 - 2\beta_2 g_0^2 + 2\beta g_0^4)$$

$$(b'')\ 0 = \gamma f_0^3 - \gamma_1 f_0^2 + (\gamma_2 - 2\gamma g_0^2) f_0 - (\gamma_3 - \gamma_1 g_0^2).$$

Si los cuatro módulos de la ecuacion propuesta fuesen desiguales, á cada valor de g correspondería uno solo de f; y este valor, que simultáneamente debería anular los dos polinomios (a'') y (b''), se hallará efectuando con estos polinomios las operaciones necesarias para determinar su máximo comun divisor, hasta llegar á un resíduo de primer grado; é igualando á *cero* este resíduo.

Si dos módulos fuesen iguales, el resíduo que debería igualarse á cero, para formar la ecuacion cuyas raices son los dos valores correspondientes de f, sería el de segundo grado: primero que se obtiene por la division del polinomio (a'') por el (b'').

Si lo fuesen tres, el divisor comun de las dos ecuaciones ó polinomios últimamente citados, ascendería al tercer grado, y no podría discrepar sustancialmente del (b''). La ecuacion de

este nombre habría entónces que resolver para encontrar los tres valores de f, correspondientes al triple de g, designado por g_0.

Y si fuesen iguales los cuatro módulos, los cuatro valores iguales ó desiguales de f_0 se desprenderian de la ecuacion (a'') cuyas raices serían entónces necesariamente reales.

Hasta ahora sólo sabemos hallar los módulos de las raices imaginarias de una ecuacion cuando estos módulos son desiguales: pero nuestra ignorancia en este punto, ó la limitacion de nuestro conocimiento en la materia, en nada invalida cuanto concerniente á la investigacion de los valores de f, despues de averiguados los de g, hemos expuesto en la hipótesis de que dos ó mas módulos sean iguales.

Respecto á la ecuacion del grado décimo nos limitaremos á consignar las fórmulas necesarias para su resolucion completa, sin agregar ninguna explicacion ó comentario, por creerlo excusado, despues de todo lo dicho, á propósito de los grados inferiores.

Ecuacion de décimo grado.

Coeficientes propios: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots, \alpha_{10}$.

Coeficientes auxiliares:

$$\left.\begin{array}{ll} 1+\alpha_{10}g_0^{-10} & =\beta \\ \alpha_1+\alpha_9 g_0^{-8} & =\beta_1 \\ \alpha_2+\alpha_8 g_0^{-6} & =\beta_2 \\ \alpha_3+\alpha_7 g_0^{-4} & =\beta_3 \\ \alpha_4+\alpha_6 g_0^{-2} & =\beta_4 \\ \alpha_5+\alpha_5 & =\beta_5 \end{array}\right\}, \text{ y } \left.\begin{array}{ll} 1-\alpha_{10}g_0^{-10} & =\gamma \\ \alpha_1-\alpha_9 g_0^{-8} & =\gamma_1 \\ \alpha_2-\alpha_8 g_0^{-6} & =\gamma_2 \\ \alpha_3-\alpha_7 g_0^{-4} & =\gamma_3 \\ \alpha_4-\alpha_6 g_0^{-2} & =\gamma_4 \end{array}\right\}.$$

Ecuaciones finales:

$$(a''')\quad 0 = \beta f_0^5 - \beta_1 f_0^4 + (\beta_2 - 5\beta g_0^2) f_0^3 - (\beta_3 - 4\beta_0 g_0^2) f_0^2$$
$$+ (\beta_4 - 3\beta_2 g_0^2 + 5\beta g_0^4) f_0 - (\beta_5 + 2\beta_3 g_0^2 + 2\beta_1 g_0^4)$$

$$(b''')\quad 0 = \gamma f_0^4 - \gamma_1 f_0^3 + (\gamma_2 - 3\gamma g_0^2) f_0^2 - (\gamma_3 - 2\gamma_1 g_0^2) f_0$$
$$+ (\gamma_4 - \gamma_2 g_0^2 + \gamma g_0^4).$$

§. 19.

Manera de proceder en la práctica.

El resíduo de *primer grado*, con relacion á f_0, resultante de las operaciones necesarias para hallar el comun divisor de dos polinomios, análogos á los (a''') y (b''') del párrafo anterior, podría determinarse *à priori*, en funcion del módulo g_0 y de los coeficientes auxiliares β, β_1, β_2 ... γ, γ_1, γ_2 ...; pero su expresion analítica es ya tan complicada en el caso más sencillo de la ecuacion de sexto grado, ó cuando los polinomios, que uno por otro deben sucesivamente dividirse, son los (a') y (b'), y de tal manera se embrolla en adelante, que lo factible y más directo en teoría, sería por extremo inconveniente y muy complicado en la práctica. Preferible á cualquier otro procedimiento de operar es reducir las dos ecuaciones (30) y (31), que por regla general deben poseer una sola raíz comun, y, por lo tanto, un simple divisor de primer grado como máximo, á las formas

$$(A)\quad A f_0^n + A_1 f_0^{n-1} + A_2 f_0^{n-2} + \ldots + A_n = 0, \text{ y}$$

$$(B)\quad B f_0^{n-1} + B_1 f_0^{n-2} + B_2 f_0^{n-3} + \ldots + B_{n-1} = 0:$$

en las cuales los coeficientes A, A_1, A_2, ... B, B_1, B_2 ... no comprenden ya símbolo alguno indeterminado, y pueden considerarse en cada caso particular como números perfectamen-

te conocidos; y efectuar la division de una por otra, de la segunda luégo por el residuo del grado $n-2$, de este resíduo por el del grado $n-3$, y así sucesivamente hasta llegar á un resíduo de *primer grado*, —que se igualará á *cero*, para formar una ecuacion del mismo nombre y deducir el valor de f_0, —en observancia estricta de los más sencillos preceptos del Álgebra.

Sin modificar sustancialmente este procedimiento de cálculo, simplificaríase mucho, sin embargo, si las varias operaciones numéricas que comprende se verificasen con auxilio de las tablas de logaritmos, limitándose á los de cinco cifras decimales; y, sobre todo, de las *Tablas* de Gauss, llamadas de *adicion* y *sustraccion*, por medio de las cuales, dados los logaritmos de dos números a y b, el de la suma ó el de la diferencia de ambos se obtiene aplicando al logaritmo del mayor una correccion aditiva ó sustractiva, contenida en las mismas tablas. —Suponiendo, por ejemplo, que $a > b$, la regla de cálculo se halla formulada en estos sencillos términos: $\log(a \pm b) = \log a \pm \delta$. Y la correccion δ se buscará y encontrará en las tablas citadas con el *argumento* $(\log a - \log b)$, que inmediatamente se deduce de la comparacion de ambos logaritmos de a y de b, ya conocidos.

Disponiendo de este nuevo elemento auxiliar, las varias divisiones de polinomios que deberán efectuarse para obtener el máximo comun divisor de los (A) y (B), generalmente de primer grado, se verificarán de conformidad con los preceptos siguientes.

En los polinomios (A) y (B) se reemplazarán los coeficientes de la incógnita f_0 por sus logaritmos, sin alterar los signos de aquellos coeficientes. Y restando luégo de los logaritmos de A_1, A_2, A_3 ... el de A, y de los de B_1, B_2, B_3 ... el de B, aquellos polinomios se transformarán en estos otros:

$$(A_1) \quad f_0^n + a_1 f_0^{n-1} + a_2 f_0^{n-2} + a_3 f_0^{n-3} + \ldots, \text{ y}$$

$$(B_1) \quad f_0^{n-1} + b_1 f_0^{n-2} + b_2 f_0^{n-3} + b_3 f_0^{n-4} + \ldots :$$

en los cuales los coeficientes a_1, a_2, a_3 ... , y b_1, b_2, b_3 ... , son logaritmos.

Por resultado de la division de los polinomios (A) y (B), simbólicamente representados, en cierto modo, por los (A_1) y (B_1), obtendríase un primer resíduo del grado $n - 1$, que, despues de reemplazar los coeficientes por sus logaritmos, podremos escribir como sigue:

$$(C) \quad cf_0^{n-1} + c_1 f_0^{n-2} + c_2 f_0^{n-3} + \ldots$$

De los coeficientes $a_1, a_2, a_3 \ldots$ y $b_1, b_2, b_3 \ldots$ se deducen los $c, c_1, c_2 \ldots$, de este modo: *restando* de los primeros los segundos, ó de los segundos los primeros: —de los mayores de una serie los correspondientes menores en la otra, prescindiendo por de pronto de los *signos* en ambas;— acudiendo á las tablas de Gauss con las diferencias resultantes como *argumentos;* y *agregando* las *correcciones* que allí se encontraren á los mayores logaritmos a ó b, ó *restándolas* de los mayores, segun que los coeficientes comparados, a_n y b_n, tengan signos contrarios ó idénticos. Los *signos* de los nuevos coeficientes, $c, c_1, c_2 \ldots$, serán: en el primer caso los de $a, a_1, a_2 \ldots$; y en el segundo los de los coeficientes mayores, a_n y b_n, de donde proceden.

Restando de los coeficientes $c_1, c_2, c_3 \ldots$ el c, —lo cual equivale á dividir el polinomio (C) por el coeficiente de su primer término, —el resíduo de la division del (A) por el (B) adquirirá la misma forma de los (A_1) y (B_1); y la operacion iniciada podrá continuarse y prolongarse luégo sin modificacion, hasta apurarla y llegar al deseado término. Los trámites necesarios para ello son los resumidos en la adjunta pauta:

Dividendo 1.° (A_1).	f_0^n	$+ a_1 f_0^{n-1}$	$+ a_2 f_0^{n-2}$	$+ a_3 f_0^{n-3} + \ldots$
Divisor 1.° (B_1)...	f_0^{n-1}	$+ b_1 f_0^{n-2}$	$+ b_2 f_0^{n-3}$	$+ b_3 f_0^{n-4} + \ldots$
Argumentos $(a - b)$.		d_1	d_2	d_3 ...
Correcciones tabuladas.		e_1	e_2	e_3 ...
Primer resíduo $(d \pm e)$ ó (C)		$c f_0^{n-1}$	$+ c_1 f_0^{n-2}$	$+ c_2 f_0^{n-3} + \ldots$
Dividendo 2.° $(C : c)$.....		f_0^{n-1}	$+ \alpha_1 f_0^{n-2}$	$+ \alpha_2 f_0^{n-3} + \ldots$
Divisor 1.° y 2.° (B_1).....		f_0^{n-1}	$+ b_1 f_0^{n-2}$	$+ b_2 f_0^{n-3} + \ldots$
Argumentos $(\alpha - b)$.....			δ_1	δ_2 ...
Correcciones tabuladas....			ε_1	ε_2 ...
Segundo resíduo $(\delta \pm \varepsilon)$, ó (D)....			γf_0^{n-2}	$+ \gamma_1 f_0^{n-3} + \ldots$
Divisor 3.° $(D : \gamma)$.....			f_0^{n-2}	$+ \beta_1 f_0^{n-3} + \ldots$

.....

.....

§. 20.

Aplícase la teoría al análisis de un ejemplo.

A semejanza de lo hecho al final de los dos capítulos precedentes, aplicaremos ahora lo que en términos generales acaba de exponerse á la resolucion de un ejemplo interesante, prescindiendo, por de pronto y para mayor claridad, de las tablas de Gauss, muy poco difundidas, y empleando las vulgares de logaritmos con siete cifras decimales. Con ménos cifras, el trabajo de cálculo sería mucho más rápido y sencillo; pero el grado de aproximacion en los resultados dejaría sin duda en este caso algo que desear. Del uso que puede hacer-

se de las tablas de Gauss se hallará otro ejemplo en el capitulo final de esta *Memoria*.

Sea la ecuacion de sexto grado:

$$3447\,x^6 + 14560\,x^5 + 22130\,x^4 + 25857\,x^3 + 29193\,x^2 + 11596\,x + 5602 = 0 \quad (*).$$

Dividiendo todos sus términos por el coeficiente del primero, —operacion que deberemos efectuar con auxilio de las tablas de logaritmos,— la reduciremos por de pronto á esta otra:

$$x^6 + 4.2239631\,x^5 + 6.5071075\,x^4 + 7.5013052\,x^3 + 8.4691019\,x^2 + 3.3640845\,x + 1.6251813 = 0.$$

Y reemplazando los coeficientes por sus logaritmos, y aplicando las reglas de transformacion de la propuesta, en el capítulo primero consignadas, á la deduccion de otras varias ecuaciones cuyas raíces sean las potencias 2^1, 2^2, 2^3... de las que aquella primera ecuacion contiene, sucesivamente hallaremos las que siguen:

(*) Esta ecuacion es una de las varias que Le Verrier discute en su célebre *Memoria sobre los Movimientos del planeta Urano* (*Recherches sur les Mouvements de la planète Herschel*, 1846), pág. 174, donde pronostica, por fin, la existencia y situacion del planeta, hasta entónces desconocido, *Neptuno*. Pero el sabio astrónomo citado ni la resuelve, ni tiene para qué resolverla; sino que se limita á demostrar, por el teorema y método de Sturm, que sus raices son todas imaginarias.—Con mayor facilidad y ménos riesgo de equivocarse, se demuestra lo mismo, y se determinan los valores de los tres *módulos*, por el método que se ha explicado y emplea en el texto.

$$(2^0)\ x^6 + 0.6257201\,x^5 + 0.8133880\,x^4 + 0.8751368\,x^3 + 0.9278374\,x^2 + 0.5268669\,x + 0.2109018 = 0$$

$$(2^1)\ x^6 + 0.6837356\,x^5 - 0.6117036\,x^4 - 1.4590905\,x^3 + 1.6274283\,x^2 - 1.2097987\,x + 0.4218036 = 0$$

$$(2^2)\ x^6 + 1.4981150\,x^5 + 2.5791179\,x^4 + 3.0057607\,x^3 + 2.9261326\,x^2 + 1.5885620\,x + 0.8436072 = 0$$

$$(2^3)\ x^6 + 2.3664619\,x^5 + 4.9129268\,x^4 + 5.5901321\,x^3 + 5.8050618\,x^2 - 4.0114118\,x + 1.6872144 = 0$$

$$(2^4)\ x^6 - 5.0398083\,x^5 + 9.8140402\,x^4 + 10.6717924\,x^3 + 11.6185655\,x^2 + 7.6361385\,x + 3.3744288 = 0$$

$$(2^5)\ x^6 - 10.0093400\,x^5 + 19.6281857\,x^4 - 21.5064467\,x^3 + 23.2371208\,x^2 - 13.9828161\,x + 6.7488576 = 0$$

Del exámen de este grupo de ecuaciones se desprenden dos consecuencias importantes.

Primera: que la ecuacion propuesta sólo contiene raices imaginarias; pues así únicamente se explica la variabilidad desordenada, en magnitud y en signo, de los coeficientes sucesivos de las potencias *impares* de la incógnita, x^5, x^3 y x.

Y, segunda: que para deducir los valores de los tres módulos, correspondientes á las seis raices imaginarias conjugadas, no hay que pasar de la transformada de la ecuacion propuesta, designada por el símbolo (2^5); porque, limitando la aproximacion en los resultados á la que puede obtenerse con las tablas logarítmicas de siete cifras, los coeficientes de las potencias pares de la incógnita, —x^4, x^2 y x^0,—de los

cuales dependen los valores de los tres módulos, se deducen desde la ecuacion (2^5) en adelante por simples elevaciones al cuadrado de los coeficientes ya obtenidos, ó duplicaciones de sus logaritmos.

Luego inmediatamente podremos escribir estas tres igualdades:

$$2^5 \log g_0^2 = 19.6281857;$$

$$2^5 \log g_0^2 g_1^2 = 23.2371208; \text{ y}$$

$$2^5 \log g_0^2 g_1^2 g_2^2 = 6.7488576$$

De las cuales se infieren los siguientes valores aproximados de los cuadrados de los módulos:

$$g_0^2 = 4.1056396; \; g_1^2 = 1.2965200; \text{ y } g_2^2 = 0.3053106$$

Para completar la resolucion de la ecuacion propuesta, fáltanos todavía hallar los tres valores de f, $-f_0$, f_1 y f_2, — que á los precedentes de g^2 corresponden. Y para esto necesitamos aplicar al caso particular de que ahora se trata las fórmulas generales, concernientes á la ecuacion de sexto grado, en el §. 18 insertas. Las que entónces designamos por (a') y (b') se convierten en los tres sistemas ó grupos adjunjos, si sucesivamente calculamos sus coeficientes, y las cantidades auxiliares que en su composicion figuran, —las β, β_1 y β_2, y las γ, γ_1 y γ_2,— con los valores de g_0^2, g_1^2 y g_2^2. La β_2 es independiente de los módulos, é igual al duplo del coeficiente central, α_3, de la ecuacion propuesta, transformada de modo que su primer coeficiente, α_0, sea igual á la unidad.

$$\begin{cases} (a'_0) & 1.0234833\, f_0^3 - 4.4235377\, f_0^2 - 4.0362543\, f_0 + 21.320289 = 0 \\ (b'_0) & 0.9765167\, f_0^2 - 4.0243885\, f_0 + 0.4350842 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a'_1) & 1.7457002\, f_1^3 - 6.2252461\, f_1^2 + 6.2492833\, f_1 + 1.139702 = 0 \\ (b'_1) & 0.2542998\, f_1^2 - 2.2226801\, f_1 - 0.3547779 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a'_2) & 58.1053026\, f_2^3 - 40.3136656\, f_2^2 - 18.974081\, f_2 + 9.613765 = 0 \\ (b'_2) & 56.1053026\, f_2^2 - 31.8657394\, f_2 + 4.102659 = 0. \end{cases}$$

Cada uno de estos tres sistemas de ecuaciones particulares es análogo en su composicion al que, en términos generales, designamos por (A) y (B) en el §. 19. Y como por lo dicho en éste y en los otros tres párrafos anteriores, las dos ecuaciones (a_0') y (b_0') deben tener una sola raiz comun, —segundo coeficiente del trinomio $x^2 + f_0 x + g_0^2$, que á la ecuacion propuesta corresponde; otra raiz comun las (a_1') y (b_1'), —segundo tambien del $x^2 + f_1 x + g_1^2$; y otra las (a'_2) y (b_2'),—segundo asimismo del $x^2 + f_2 x + g_2^2$: resulta que la descomposicion en trinomios, ó la resolucion completa, de la ecuacion primitiva depende, en suma, de la investigacion de estas raices, f_0, f_1 y f_2, comunes respectivamente á cada par ó sistema de ecuaciones auxiliares, de las tres que preceden: investigacion sencillísima, en principio cuando ménos, por el método del *m. c. d.* de dos polinomios, ya ordenados con respecto á la misma letra.

Para simplificarla todavía más, comenzaremos por dividir, como de costumbre, con auxilio de las tablas de logaritmos, las seis ecuaciones precedentes por el coeficiente de sus primeros términos respectivos. Y los tres grupos ó pares de ecuaciones se transformarán entónces en los que siguen:

meros términos respectivos. Y los tres grupos ó pares de ecuaciones se trasformarán entónces en los que siguen:

$$\begin{cases} (\alpha'_0) & f_0^3 - 4.3220420\, f_0^2 - 3.9436445\, f_0 + 20.831110 = 0 \\ (\beta'_0) & f_0^2 - 4.1211667\, f_0 + 0.4455471 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha'_1) & f_1^3 - 3.5660459\, f_1^2 + 3.5798149\, f_1 + 0.6528624 = 0 \\ (\beta'_1) & f_1^2 - 8.7403900\, f_1 - 1.3951164 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\alpha'_2) & f_2^3 - 0.6938035\, f_2^2 - 0.3265465\, f_2 + 0.1654541 = 0 \\ (\beta'_2) & f_2^2 - 0.5679630\, f_2 + 0.0731243 = 0. \end{cases}$$

Fijémonos, por ejemplo, en el primero de estos tres sistemas y veamos cómo y en qué órden deben verificarse las operaciones necesarias para hallar el valor de f_0, comun á las dos ecuaciones componentes (α'_0) y (β'_0). Conforme indica la adjunta pauta:

Dividendo....	$f_0^3 - 4.3220420\, f_0^2 - 3.9436445\, f_0 + 20.831110$
Divisor.....	$f_0^2 - 4.1211667\, f_0 + 0.4455471$
Resíduo.....	$-0.2008753\, f_0^2 - 4.3891916\, f_0 + 20.831110$
Id. simbólico...	$-\overline{1}.3029265\, f_0^2 - 0.6423846\, f_0 + 1.3187124$
Id. id. simplificado.....	$f_0^2 + 1.3394581\, f_0 - 2.0157859$
Resíduo 1.º ó dividendo 2.º....	$f_0^2 + 21.850337\, f_0 - 103.701701$
Divisor 1.º y 2.º.....	$f_0^2 - 4.121167\, f_0 + 0.445547$
Resíduo 2.º y final.....	$25.971504\, f_0 - 104.147248$

Igualando á cero el último resíduo se expresa la condicion de que las dos ecuaciones (α_0') y (β_0') tienen una raíz co-

mun, y se deduce luégo que el valor aproximado de esta raiz es el siguiente:

$$f_0 = 4.0100583$$

Como las operaciones aritméticas verificadas para deducir este resultado son por necesidad muy numerosas, y como en todas ellas, empleando las tablas de logaritmos, se comete ó puede cometerse un error inevitable en la valuacion de las últimas cifras, la aproximacion del valor de f_0 hasta la séptima cifra decimal será las más veces ilusoria. Ni áun en la sexta debe tenerse nunca plena confianza; y, cuando fuere menester cerciorarse de la verdad á toda costa, habrá que calcular la correccion del valor de f_0, por este procedimiento obtenido, con auxilio de las fórmulas adecuadas al objeto y al final del capítulo anterior insertas.

Pero, dejando á un lado este punto, ya latamente discutido, es de advertir que tanto el valor de f_0, como los de f_1 y f_2, pueden en este caso particular determinarse, más sencillamente que por el método del *m. c. d.*, resolviendo las tres ecuaciones de segundo grado (β_0'), (β_1') y (β_2'), y prescindiendo de las tres raices extrañas á la cuestion, ó que no satisfacen á la ecuaciones (α_0'), (α_1') y (α_2').

Las dos raices de la ecuacion (β_0') son, por ejemplo, éstas: $+ 4.0100595$ y $+ 0.1111072$: de las cuales es cosa bien fácil cerciorarse, de una rápida ojeada, que sólo la primera puede ser tambien raiz de la (α_0').

Las dos de la ecuacion (β_1') éstas: $+ 8.8971940$ y $- 0.1568040$: perteneciente tambien la segunda á la ecuacion (α_1').

Y las dos de la (β_2') estas otras: $+0.3707063$ y $+0.1972567$: propia asimismo de la (α_2') la primera.

En conclusion: los tres trinomios de segundo grado, en que la ecuacion propuesta, de sexto, puede descomponerse, serán muy aproximadamente los que siguen:

$$x^2 + 4.0100595\,x + 4.1056396;$$

$$x^2 - 0.1568040\,x + 1.2965200; \text{ y}$$

$$x^2 + 0.3707063\,x + 0.3053106$$

Efectuando su producto, por via de comprobacion, obtiénese un polinomio de sexto grado, cuyos coeficientes sólo discrepan de los de la ecuacion propuesta desde la sexta cifra decimal, inclusive, en adelante. Y la razon ó causa de la diferencia ya en este mismo párrafo queda indicada: en parte debe atribuirse á la incertidumbre en la determinacion de los valores de *g;* y en parte, mucho mayor, á los errores inevitables que al deducir los valores de *f*, dependientes de los anteriores, deben necesariamente cometerse.

CAPITULO IV.

Ampliacion de la teoría expuesta en el capítulo precedente al caso en que la ecuacion, de grado *par*, que se trata de resolver, contenga raíces reales é imaginarias.

---

§. 21.

Enúnciase de nuevo y se resuelve en términos generales el problema de los párrafos 16 *y* 17.

Cuanto se acaba de exponer concerniente á la descomposicion en n trinomios de segundo grado, de una ecuacion del grado $2n$, en el supuesto de ser todas sus raíces imaginarias, puede literalmente casi reproducirse, sin restriccion alguna preliminar.

Representemos, en efecto, por el trinomio $x^2 + fx + v$ uno de los componentes de la ecuacion; supongamos que, por cualquier procedimiento, se haya logrado ya determinar el valor de v; y propongámonos deducir el de f correspondiente.

Cualquiera que sea el valor de v, y, por lo tanto, cualesquiera que sean las dos raíces de la ecuacion propuesta, en el trinomio considerado comprendidas: —ambas *imaginarias*, si $v > {}^1/_4 f^2$; *reales* las dos y del mismo signo, contrario al de f, si $v > 0$ y $< {}^1/_4 f^2$; ó *reales* y de signos opuestos, si $v < 0$;— aquel trinomio podrá suponerse siempre descompuesto en dos binomios, de este modo:

$$x^2 + fx + v = (x + z\sqrt{v})\left(x + \frac{1}{z}\sqrt{v}\right).$$

De donde se deduce que

$$f = \sqrt{v}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Y, designando por a y b las dos raíces (§. 1) del trinomio, podremos escribir tambien estas otras igualdades:

$$z = \sqrt{\frac{a}{b}}\,; \quad \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{b}{a}}; \quad \text{y} \qquad v = ab.$$

Considerado en absoluto, ó prescindiendo de su signo, y con el solo objeto de simplificar un poco la notacion y escritura de las fórmulas que siguen, el producto ab le representaremos en adelante por g^2, ó por g el valor de $\sqrt{v}$.

Tras de estos preliminares, en la ecuacion general

$$x^{2n} + \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} + \ldots\ldots + \alpha_{2n-1}\, x + \alpha_{2n} = 0$$

pongamos sucesivamente por x sus dos valores, $-gz$ y $-gz^{-1}$, y obtendremos estos dos, en la apariencia, distintos resultados: (32)

$$g^{2n} z^{2n} - \alpha_1 g^{2n-1} z^{2n-1} + \alpha_2 g^{2n-2} z^{2n-2} - \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^2 z^2 - \alpha_{2n-1} gz + \alpha_{2n} = 0; \quad \text{y}$$

$$g^{2n} z^{-2n} - \alpha_1 g^{2n-1} z^{-2n+1} + \alpha_n g^{2n-2} z^{-2n+2} - \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^2 z^{-2} - \alpha_{2n-1}\, g z^{-1} + \alpha_{2n} = 0.$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $g^{-2n} z^{-n}$, y la segunda por $g^{-2n} z^n$, y combinando los dos resultados uno con otro, por vía de adicion y de sustraccion, obtiénense los dos siguientes (33):

$$(z^n + z^{-n}) - \alpha_1 g^{-1}(z^{n-1} + z^{-n+1}) + \alpha_2 g^{-2}(z^{n-2} + z^{-n+2}) - \ldots + \ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^{-2n+2}(z^{n-2} + z^{-n+2}) - \alpha_{2n-1} g^{-2n+1}(z^{2n-1} + z^{-n+1}) +$$
$$\alpha_{2n} g^{-2n}(z^n + z^{-n}) = 0; \text{ y}$$

$$(z^n - z^{-n}) - \alpha_1 g^{-1}(z^{n-1} - z^{-n+1}) + \alpha_2 g^{-2}(z^{n-2} - z^{-n+2}) - \ldots + \ldots$$
$$- \alpha_{2-n2} g^{-2n+2}(z^{n-2} - z^{-n+2}) + \alpha_{2n-1} g^{-2n+1}(z^{2n-1} + z^{-n+1}) -$$
$$\alpha_{2n} g^{-2n}(z^n - z^{-n}) = 0.$$

Y suponiendo ahora que

(34)

$$\left.\begin{array}{ll} 1 + \alpha_{2n} g^{-2n} & = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_{2n-1} g^{-2n+2} & = \beta_1 \\ \alpha_2 + \alpha_{2n-2} g^{-2n+4} & = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} g^{-2} & = \beta_{n-1} \\ \alpha_n + \alpha_n & = \beta_n \end{array}\right\} \text{y}$$

(35)

$$\left.\begin{array}{ll} 1 - \alpha_{2n} g^{-2n} & = \gamma \\ \alpha_1 - \alpha_{2n-1} g^{-2n+2} & = \gamma_1 \\ \alpha_2 - \alpha_{2n-2} g^{-2n+4} & = \gamma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{n-1} - \alpha_{n+1} g^{-2} & = \gamma_{n-1} \end{array}\right\},$$

y aglomerando en uno solo cada dos términos equidistantes de los extremos, las ecuaciones (33) podrán escribirse de este modo: (36)

$$\beta(z^n + z^{-n}) - \frac{\beta_1}{g}(z^{n-1} + z^{-n+1}) + \frac{\beta_2}{g^2}(z^{n-2} + z^{-n+2}) - \ldots + \ldots$$
$$\pm \frac{\beta_{n-1}}{g^{n-1}}(z + z^{-1}) \mp \frac{\beta_n}{g^n} = 0; \quad \text{y}$$

$$\gamma(z^n - z^{-n}) - \frac{\gamma_1}{g}(z^{n-1} - z^{-n+1}) + \frac{\gamma_2}{g^2}(z^{n-2} - z^{-n+2}) - \ldots + \ldots$$
$$\mp \frac{\gamma_{n-2}}{g^{n-2}}(z^2 - z^{-2}) \pm \frac{\gamma_{n-1}}{g^{n-1}}(z - z^{-1}) = 0.$$

Los binomios de la forma $(z^n + z^{-n})$, ó $(z^n - z^{-n})$, componentes de las ecuaciones anteriores, dependen unos de otros conforme indican las dos adjuntas relaciones algebráicas: (37)

$$z^n + z^{-n} = (z + z^{-1})(z^{n-1} + z^{-n+1}) - (z^{n-2} + z^{-n+2}), \quad \text{y}$$

$$\frac{z^n + z^{-n}}{z - z^{-1}} = (z + z^{-1})\left(\frac{z^{n-1} - z^{-n+1}}{z - z^{-1}}\right) - \left(\frac{z^{n-2} - z^{-n+2}}{z - z^{-1}}\right):$$

de las cuales, atribuyendo á n los valores sucesivos 0, 1, 2, 3... y recordando que

$$z^0 + z^{-0} = 2, \quad \text{y} \quad z^1 + z^{-1} = \frac{f}{g},$$

se deducen las siguientes expresiones particulares:

(38)	(39)
$z^0 + z^{-0} = 2$	$\dfrac{z^0 - z^{-0}}{z - z^{-1}} = 0$
$z^1 + z^{-1} = \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{z - z^{-1}}{z - z^{-1}} = 1$
$z^2 + z^{-2} = \dfrac{f^2}{g^2} + 2$	$\dfrac{z^2 - z^{-2}}{z - z^{-1}} = \dfrac{f}{g}$
$z^3 + z^{-3} = \dfrac{f^3}{g^3} - 3\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{z^3 - z^{-3}}{z - z^{-1}} = \dfrac{f^2}{g^2} - 1$
$z^4 + z^{-4} = \dfrac{f^4}{g^4} - 4\dfrac{f^2}{g^2} + 2$	$\dfrac{z^4 - z^{-4}}{z - z^{-1}} = \dfrac{f^3}{g^3} - 2\dfrac{f}{g}$
.....	.....

Las fórmulas generales, de donde proceden ó se derivan las expresiones precedentes, —de cuya exactitud, por otra

parte, podemos cerciorarnos con auxilio de las ecuaciones condicionales (37),— son éstas: (40)

$$z^n + z^{-n} = \frac{f^n}{g^n} - M_1 \frac{f^{n-2}}{g^{n-2}} + M_2 \frac{f^{n-4}}{g^{n-4}} - M_3 \frac{f^{n-6}}{g^{n-6}} + \ldots\ldots ; \quad \text{y}$$

$$\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} = \frac{f^{n-1}}{g^{n-1}} - N_1 \frac{f^{n-3}}{g^{n-3}} + N_2 \frac{f^{n-5}}{g^{n-5}} - N_3 \frac{f^{n-7}}{g^{n-7}} + \ldots\ldots :$$

en las cuales las letras M y N designan abreviadamente lo expuesto en el §. 17.

Con auxilio de estas dos últimas fórmulas, los binomios contenidos en las ecuaciones (36) pueden eliminarse, ó quedar reemplazados por polinomios de los grados n, $n - 1$, $n - 2$, ..., con respecto á la letra f. Y, verificada esta eliminacion, las dos ecuaciones últimamente citadas se transforman, sin variante alguna, en las que páginas más atrás designamos por (30) y (31), y detenidamente analizamos.

Ni puede ser de otro modo: por cuanto las (30) y (31) proceden de la ecuacion general, del grado $2n$, por la sustitucion sucesiva de $g(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi)$ y de $g(\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi)$, en vez de x; y las (36) por la de $-gz$ y $-gz^{-1}$. Y como, si suponemos que

$$z = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi,$$

lo será tambien

$$z^{-1} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi;$$

y como estos valores particulares de z y de z^{-1} satisfacen á las relaciones (37), las dos transformaciones de la ecuacion general coinciden en principio y no pueden discrepar esencialmente en los resultados ni en un ápice. A mayor abundamiento, y conforme en uno de los *Apéndices* á esta Memoria se demostrará, conviene advertir todavía que las fórmulas auxiliares (40) solo en la apariencia difieren de las que en el capitulo anterior nos sirvieron para expresar el $\cos n\varphi$ y la

relacion $\frac{\text{sen } n\varphi}{\text{sen } \varphi}$, en funcion de las potencias enteras decrecientes de cos φ.—Inútil es, en consecuencia, insistir un momento más sobre este punto.

§. 22.

Dificultades que pueden presentarse al descomponer una ecuacion en trinomios reales de segundo grado, cuando son asimismo reales sus binomios componentes de primero.

Cuando todas las raices de la ecuacion propuesta son *imaginarias*,

$$v = \sqrt{ab} = \sqrt{(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1})} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = g;$$

y este valor de v sabemos ya cómo se encuentra ó determina. Y, cuando *reales*, la investigacion es análoga é igualmente sencilla. En ambos casos los diversos valores de v se deducen por la division, unos por otros, de los coeficientes de órden *impar* de la ecuacion final, transformada de la primitiva por la regla del §. 3.°, y extraccion de las raices aritméticas de los cocientes así obtenidos, cuyos *índices* coinciden con los exponentes de las potencias á que las raices de la ecuacion propuesta se hubieren en último término elevado. Esto supone que la propuesta es de grado *par*, $2n$ por ejemplo; pero, si no lo fuese, bastaría multiplicarla por el factor $(x + 0)$, ó todos sus términos por x, para que, sin complicacion de ningun género, pasase del grado $2n - 1$ al $2n$, al cual se aplican los razonamientos anteriores. Sean, pues, *reales* ó *imaginarias* todas las raices de una ecuacion, su distribucion en trinomios reales de segundo grado podrá siempre verificarse ateniéndose á las mismas reglas.

Obtenido un trinomio de la forma $x^2 + fx + v$, la mane-

ra más sencilla de encontrar las dos raíces, a y b, en él comprendidas, parece ser la siguiente.

1.° Si $v > 0$ y $f < 2\sqrt{v}$, suponiendo que $\frac{f}{2\sqrt{v}} = \cos\varphi$,

$$(41)\quad \begin{aligned} a &= \sqrt{v}\,(-\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\varphi), \quad \text{y} \\ b &= \sqrt{v}\,(-\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\varphi). \end{aligned}$$

2.° Si $v > 0$ y $f > 2\sqrt{v}$, suponiendo que $\frac{2\sqrt{v}}{f} = \operatorname{sen}\varphi$,

$$(42)\quad a = -\sqrt{v}\,.\,\operatorname{tang}{}^1/_2\,\varphi; \text{ y } b = -\sqrt{v}\,.\,\cot{}^1/_2\,\varphi$$

Y 3.° Si $v < 0$, prescindiendo por de pronto del signo de v, y suponiendo que $\frac{2\sqrt{v}}{f} = \operatorname{tang}\varphi$,

$$(43)\quad a = +\sqrt{v}\,.\,\operatorname{tang}{}^1/_2\,\varphi; \text{ y } b = -\sqrt{v}\,.\,\cot{}^1/_2\,\varphi.$$

Pero ¿cuál es el *signo* de v?

Cuando las dos raices a y b son imaginarias *conjugadas*, v es esencialmente *positivo;* pero, cuando *reales*, lo mismo puede ser positivo que negativo. Y como v se deduce, no de la ecuacion propuesta, sino de la transformada cuyas raíces, a^{2m} y b^{2m}, son, en el segundo supuesto, por necesidad *positivas*, y positivo por lo tanto su producto, ó el valor de v^{2m}, despues de extraer de este producto la raiz $2m$, falta determinar el signo de v: signo del cual dependen el cálculo nada breve y el valor de f, y, por consecuencia, tambien los valores de a y b.—La descomposicion en trinomios de segundo grado de la ecuacion propuesta, y, por lo tanto, su resolucion en factores de primero, cuando directamente no pueda esto verificarse,

presenta por tal motivo cierta dificultad ó incertidumbre, que de algun modo conviene desvanecer ó eludir.

El más sencillo consiste en operar, hasta resolverla por completo en trinomios de segundo grado, no sobre la ecuacion primitiva, sino sobre su primera transformada (2[1]), ó sobre aquella ecuacion cuyas raices sean los *cuadrados* de las mismas raices que se buscan. Porque si los trinomios de la primera son de la forma

$$x^2 + fx + v = (x + a)(x + b),$$

los de la segunda lo serán de esta otra:

$$x^2 + f_2x + v_2 = (x + a^2)(x + b^2);$$

y si fuere, ó más fácil, ó más directo y preciso, hallar los valores de f_2 y v_2 que los de f y v, éstos se deducirían luégo de los anteriores por las siguientes sencillísimas fórmulas:

$$(44) \quad v = \pm\sqrt{v_2}; \text{ y } f = \pm\sqrt{f_2 \pm 2\sqrt{v_2}}.$$

En el cálculo de f, $\sqrt{v_2}$ debe poseer el mismo signo que en el de v; y por este concepto no cabe incertidumbre ó ambigüedad en los resultados. Pero, concerniente á los signos de v y de f, que deben adoptarse para componer el trinomio $x^2 + fx + v$, la ambigüedad subsiste por completo; y sólo por tanteos, largos y fastidiosos, puede disiparse en la práctica. Preferible, pues, al uso de las fórmulas (44), es el de las (42) y (43), aplicables á la investigacion de las raices, a^2 y b^2, comprendidas en el trinomio $x^2 + f_2x + v_2$: porque, calculados estos valores, inmediatamente se deducirán los de a y b; y por simple sustitucion suya en la ecuacion propuesta, se advertirá luégo sin dificultad qué signos deben precederles para que puedan considerarse como verdaderas raices, ó valores legítimos de la incógnita x.

Respecto al signo de v_2 no cabe duda de que en todos los casos debe ser *positivo*.

Porque, si las raíces de la ecuacion primitiva fuesen imaginarias y de la forma $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, el trinomio real $x^2+f_2x+v_2$ coincidirá con este otro:

$$x^2 + 2g^2 \cos 2\varphi \,.\, x + g^4;$$

en el cual

$$g^4 = v_2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2; \text{ y } \cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Si de la forma $\pm\beta\sqrt{-1}$, con el trinomio

$$x^2 - 2\beta^2 x + \beta^4 = (x - \beta^2)(x - \beta^2).$$

Y, si *reales*, el trinomio de la transformada equivaldrá al producto de estos dos factores:

$$(x + a^2) \times (x + b^2);$$

y v^2, igual entónces á $(ab)^2$, sería necesariamente *positivo*, cualquiera que fuere el signo de ab ó de v.

El segundo, muy excepcional, de los tres casos considerados, ó aquel en que la primera transformada de la ecuacion propuesta comprenda dos factores reales de la forma $(x - \beta^2)$, parece todavía de interpretacion un poco dudosa: porque, combinado uno de estos factores con cualquiera otro real de *primer* grado, el trinomio resultante de *segundo*, tendría su último término *negativo*. Pero si las v_2, obtenidas por el procedimiento latamente explicado, para hallar luégo los diversos valores de g^2 ó de v; se consideran como *positivas* todas, una habrá entre ellas que corresponderá al trinomio $x^2 - 2g^2x + g^4$; y la descomposicion de la primera transformada (2^1) en un cierto producto de trinomios de segundo grado, áun entónces será factible sin asomo de ambigüedad.

Por lo demas, conviene advertir que esta tan curiosa y nimia manera de analizar y descomponer en otras más sencillas, de segundo grado, la ecuacion propuesta, operando sobre su primera transformada, admite en la práctica muy ra-

ras aplicaciones. Porque si las raices de la primitiva son todas reales, —y áun cuando sólo en parte lo sean, como en otro capítulo veremos,— lo más directo y breve es determinar sus valores por el método general, ó emprender desde luégo la descomposicion de aquella ecuacion en factores de primer grado; y si en totalidad imaginarias, como han de ser *conjugadas*, en el signo de v no cabe incertidumbre, y la descomposicion inmediata en trinomios de segundo grado podrá tambien verificarse entónces sin dificultad teórica de ningun género. A esta descomposicion, aplicada, no á la ecuacion primitiva (2°), sino á su transformada primera (2'), sólo habrá que apelar cuando, por excepcion un poco extraña, las raices reales de aquella ecuacion, prescindiendo de sus signos, discrepen apénas unas de otras, y sea, por lo tanto, muy lento, ó tal vez ineficaz, el primer método de análisis (§. 3.°), y ambiguo el segundo, que se acaba de exponer, por desconocerse *à priori* el signo de v.

Y que nos hallamos en este caso excepcional lo advertiremos en los caracteres siguientes:

1.° En que los coeficientes de las transformadas sucesivas, cualquiera que sea la potencia á que las raices de la propuesta se eleven, son siempre *positivos:* prueba de que estas raices son todas *reales;* pues, si existiesen siquiera dos *imaginarias*, el coeficiente, $2 \cos m\varphi$, del trinomio

$$x^2 + 2 \cos m\varphi \,.\, x + g^{2m},$$

aumentando m indefinidamente, debería cambiar una ó varias veces de signo, é introducir una perturbacion en los signos del producto total de factores, de primero ó de segundo grado, componentes de las varias ecuaciones transformadas.

Y 2.° En que uno ó más coeficientes de estas transformadas sucesivas variarían con grandísima lentitud, sin aproximarse ó convergir hácia un *límite* determinado, ó sin que en su composicion, al pasar de la transformada de órden 2^m á la del 2^{2m}, dejasen de influir eficazmente los demás coeficientes de la última ecuacion, por la regla general (§. 3.°) obtenida ó derivada de la propuesta.

Concluyamos. Si en las transformadas sucesivas algun término cambia de signo, indicio evidente es de que la propuesta posee raices imaginarias; y si, tras de un coeficiente de magnitud y signo variables, figura otro, siempre *positivo* y de valor *limitado*, ó independiente de los coeficientes anteriores y posteriores en el paso de una transformada á otra, de órden superior, no es ménos cierto que de él podrán deducirse luégo uno ó más valores de v, esencialmente *positivos* tambien, por corresponder á doble número de raices de aquella especie, *conjugadas*. Duda sobre el signo de v no puede surgir, sino cuando esta cantidad se desprenda de algun coeficiente de la transformada final, constantemente precedido en las intermedias de otro positivo: duda que las anteriores reflexiones contribuirán á disipar ó esclarecer, cuando, por excepcion muy rara, y como por casualidad, se presentare.

§. 23.

Ampliase la regla de Newton, para la correccion de las raices aproximadas de una ecuacion numérica, á la correccion de los trinomios de segundo grado.

Si en vez de ser imaginarias las dos raices contenidas en el trinomio $x^2+f_0x+v_0$, fuesen reales, y si en vez de corregir por la regla ó fórmula de Newton los valores aproximados de estas raices, x_0 y x'_0, se considerase preferible corregir los de f_0 y v_0, procederíase del siguiente modo, análogo, y hasta idéntico casi, al explicado en el supuesto anterior, en el §. 14.—Cuanto en este capítulo vamos exponiendo no es, en efecto, más que un resúmen, y como reproduccion desde diverso punto de vista, de la materia comprendida en los dos anteriores.

En la ecuacion propuesta, $f(x)=0$, sustitúyanse sucesivamente por x sus dos valores aproximados

$$x=-g_0z_0, \text{ y } x'_0=-g_0z^{-1},$$

y se obtendrán estos dos distintos resultados numéricos:

$$[(-g_0z_0)^n] = A, \text{ y } [(-g_0z_0^{-1})^n] = B.$$

Y, multiplicando cada término de los polinomios A y B por el exponente de la x_0 ó x'_0, en él contenida, se deducirán tambien, y al propio tiempo casi, estos otros dos:

$$[n(-g_0z_0)^n] = p, \text{ y } [n(-g_0z_0^{-1})^n] = q.$$

La fórmula general de Newton

$$0 = f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \times \Delta x_0 =$$

$$f(x_0) + xf'(x_0) \times \frac{\Delta x_0}{x_0} = [x_0^n] + [nx_0^n] \times \Delta \log x_0,$$

se convierte, en los anteriores supuestos, en las dos que siguen:

$$0 = A + p \times \Delta \log x_0, \text{ y } 0 = B + q \times \Delta \log x'_0.$$

Mas, por ser

$$x_0 = -g_0z_0; \log x_0 = \log(-g_0) + \log z_0; \text{ y}$$

$$\Delta \log x_0 = \Delta \log g_0 + \Delta \log z_0;$$

y

$$x'_0 = -g_0z_0^{-1}; \log x'_0 = \log(-g_0) - \log z_0; \text{ y}$$

$$\Delta \log x'_0 = \Delta \log g_0 - \Delta \log z_0,$$

conclúyese que

$$A + p \times (\Delta \log g_0 + \Delta \log z_0) = 0; \text{ y}$$

$$B + q \times (\Delta \log g_0 - \Delta \log z_0) = 0,$$

Y de estas últimas ecuaciones inmediatamente se desprende que

$$(45)\quad \begin{cases} \Delta \log g_0 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{q}\right), \text{ y} \\ \Delta \log z_0 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A}{p} - \dfrac{B}{q}\right). \end{cases}$$

Supongamos ahora que las dos raices x_0 y x'_0 sean reales y del mismo signo, lo cual exige que $v_0 = g_0^2 > 0$, y $< {}^1/_4 f_0^2$.

Por de pronto podremos escribir entónces las siguientes igualdades:

$$f_0 = (x_0 + x_0^{-1}) = g_0 (z_0 + z_0^{-1}); \text{ y}$$

$$(46)\quad \begin{aligned} \log f_0 &= \log g_0 + \log (z_0 + z_0^{-1}), \text{ ó} \\ \Delta \log f_0 &= \Delta \log g_0 + \Delta \log (z_0 + z_0^{-1}). \end{aligned}$$

Y si suponemos ademas, —en lo cual no hay dificultad ni inconveniente de ninguna especie,— que $\dfrac{2\sqrt{v_0}}{f_0} = \text{sen}\, \varphi_0$, nos resultará, como al deducir las ecuaciones (42), que:

$$z_0 = \text{tang}\, {}^1/_2 \varphi_0, \text{ y } z^{-1} = \text{cot}\, {}^1/_2 \varphi.$$

Y, por lo tanto:

$$\Delta \log (z_0 + z_0^{-1}) = \Delta \log \frac{2}{\text{sen}\, \varphi_0} = -\Delta \log \text{sen}\, \varphi_0 =$$

$$-\frac{\Delta\, \text{sen}\, \varphi_0}{\text{sen}\, \varphi_0} = -\frac{\cos \varphi_0}{\text{sen}\, \varphi_0} \times \Delta \varphi_0; \text{ y}$$

$$\Delta \log z_0 = \Delta \log \text{tang}\, {}^1/_2 \varphi_0 = \frac{\Delta\, \text{tang}\, {}^1/_2 \varphi_0}{\text{tang}\, {}^1/_2 \varphi_0} = \frac{\Delta \varphi_0}{\text{sen}\, \varphi_0}$$

De donde, por la simple eliminacion de $\Delta \varphi_0$, se desprende esta otra relacion:

$$\Delta \log (z_0 + z_0^{-1}) = - \cos \varphi_0 \times \Delta \log z_0.$$

Y con esto, la primera de las ecuaciones (45) y la segunda de las (46) se convierten en las que siguen:

$$(47) \qquad 2 \times \Delta \log g_0 = \Delta \log v_0 = - M \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q} \right); \text{ y}$$

$$(48) \quad \Delta \log f_0 = - \frac{M}{2} \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q} \right) + \frac{M}{2} \cos \varphi_0 \left(\frac{A}{p} - \frac{B}{q} \right) =$$

$$- M \left(\frac{A}{p} \operatorname{sen}^2 {}^1/_2 \varphi_0 + \frac{B}{q} \cos^2 {}^1/_2 \varphi_0 \right).$$

La letra M representa en estas últimas fórmulas el *módulo* de las tablas comunes, ó el número por que deben multiplicarse los logaritmos *neperianos* para convertirlos en *vulgares:* número por brevedad omitido en las líneas anteriores.

Pero, en vez de suponerlas del mismo signo, podemos atribuir signos opuestos á las dos raices reales x_0 y x'_0.

En este caso, que se verificará cuando v_0 sea menor que cero ($v_0 < 0$), podremos escribir por de pronto que

$$(49) \qquad \begin{aligned} f_0 &= x_0 + x'_0 = g_0 (z_0 - z_0^{-1}); \text{ ó} \\ \Delta \log f_0 &= \Delta \log g_0 + \Delta \log (z_0 - z_0^{-1}). \end{aligned}$$

Y si, prescindiendo del signo de v_0, suponemos que $\frac{2\sqrt{v_0}}{f_0} = \operatorname{tang} \varphi_0$, nos resultará tambien que

$$z_0 = \cot {}^1/_2 \varphi_0, \text{ y } z_0^{-1} = \operatorname{tang} {}^1/_2 \varphi_0.$$

Y de aquí, procediendo del propio modo que en el caso anterior, llegaremos sucesivamente á los siguientes resultados:

$$\Delta \log (z_0 - z_0^{-1}) = \Delta \log . \cot \varphi_0 = \frac{-\Delta \varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0}; \text{ y}$$

$$\Delta \log z_0 \qquad = \Delta \log \cot {}^1/_2 \varphi_0 = \frac{-\Delta \varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0}: \text{ ó}$$

$$\Delta \log (z_0 - z_0^{-1}) = \sec \varphi_0 \times \Delta \log z_0.$$

Y de esta última relacion, combinada con la segunda de las (49), y las dos (45), se desprende esta otra final, que es la buscada:

$$(50) \quad \Delta \log f_0 = -\frac{M}{2}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) - \frac{M}{2} \sec \varphi_0 \left(\frac{A}{p} - \frac{B}{q}\right) =$$

$$-\frac{M}{\cos \varphi_0}\left(\frac{A}{p} \cos^2 {}^1/_2 \varphi_0 - \frac{B}{q} \operatorname{sen}^2 {}^1/_2 \varphi_0\right).$$

La (47), referente á la correccion que debe aplicarse al logaritmo de v_0, vale lo mismo para el caso en que las dos raices reales del trinomio $x^2 + f_0 x + v_0$ tengan signos iguales, como contrarios ú opuestos.

La posibilidad de corregir los valores aproximados de f_0 y v_0, despues de conocidos los aproximados tambien de x_0 y x'_0, que del último trinomio se desprenden, queda con esto demostrada, y explicado á la vez el método que para calcular tales correcciones debe seguirse.

§. 24.

Aplicacion de lo expuesto á la resolucion de un ejemplo.

Ilustremos con un ejemplo el punto teórico más importante en este capítulo considerado: el referente á la dificultad ó

anomalía de que, poseyendo la ecuacion propuesta raices reales exclusivamente, *convenga*, sin embargo, analizarla como si todas fuesen imaginarias, y operar, hasta resolverla por completo, sobre su primera transformada.

Sea, pues, esta ecuacion muy sencilla la que nos proponemos resolver:

$$(2^0)\quad x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 150x - 89 = 0.$$

Su primera transformada, inmediata ó directamente deducida por la regla del (§. 3.°), es la que sigue:

$$(2^1)\quad x^4 + 126x^3 + 4143x^2 + 11642x + 7921 = 0.$$

Reemplazando ahora los coeficientes por sus logaritmos y aplicando luégo tres veces consecutivas, á la formacion de nuevas transformadas, la regla que se acaba de mencionar, obtendremos los resultados que á continuacion se expresan:

$$(2^1)\quad x^4 + 2.1003705\,x^3 + 3.6173149\,x^2 + 4.0660276\,x + 3.8987800 = 0$$

$$(2^2)\quad x^4 + 3.8802416\,x^3 + 7.1537083\,x^2 + 7.8444944\,x + 7.7975600 = 0$$

$$(2^3)\quad x^4 + 7.4641175\,x^3 + 14.3051403\,x^2 + 15.4911771\,x + 15.5951200 = 0$$

$$(2^4)\quad x^4 + 14.6472678\,x^3 + 28.6102787\,x^2 + 30.9037531\,x + 31.1902400 = 0$$

Del exámen de estas ecuaciones se desprenden dos consecuencias importantes.

1.ª Que las raices de la ecuacion (2°) son todas reales;

puesto que todos los coeficientes de sus diversas transformadas son *positivos*.

Y 2.ª Que desde la ecuacion (2^4) en adelante los coeficientes tercero y quinto, —de x^2 y x^0,— se deducen por simple *duplicacion* de los del mismo lugar ó nombre que les preceden, ó son independientes de los anteriores y posteriores de la última transformada obtenida; mas no los coeficientes segundo y cuarto, —de x^3 y x,— los cuales experimentan todavía grandes modificaciones, en el paso de una transformada á otra, por resultado de la influencia que en sus valores ejercen los de x^2, y de x^3 y x^0.

Si, pues, en el órden decreciente de magnitud *absoluta*, ó prescindiendo de los signos, representamos las cuatro raices de la ecuacion (2^0) por las letras a, b, c y d, resulta de lo acabado de advertir que en la ecuacion (2^4) los coeficientes de x^2 y x^0 representan los logaritmos de $a^{2^4}b^{2^4}$ y de $a^{2^4}b^{2^4}c^{2^4}d^{2^4}$; pero no los de a^{2^4}, ni de $a^{2^4}b^{2^4}c^{2^4}$, los de x^3 y x. La separacion de las raices es solo parcial y no total; y lo único que de la transformada (2^4) podemos desde luégo deducir son los valores de $a \times b$ y de $c \times d$: precisamente los que en los anteriores párrafos hemos designado por g_0^2 y g_1^2, ó, con mayor propiedad, por v_0 y v'_0.

En efecto:

$$2^4 \times \log ab = 28.6102787; \text{ y}$$

$$2^4 \times \log abcd = 31.1902400.$$

De donde facilísimamente se concluye que

$$ab = v_0 = 61.396324; \text{ y } cd = v'_0 = 1.449598.$$

Si nos empeñásemos en obtener las cuatro raices de la ecuacion (2^0) por el procedimiento general, explicado y practicado en el Capítulo I, deberíamos continuar la serie de transformaciones de aquella ecuacion hasta dar con una derivada suya, cuyos coeficientes fuesen todos, como los de x^2 y x^0 en

las (2^5), independientes por completo de los anteriores y posteriores en la transformada precedente.—¿Y cuál sería en este caso la transformada final?—La novena (2^9). Pero otros casos ó ejemplos análogos podrían presentarse en que la separacion completa de las raices exigiese todavía número mucho mayor de transformaciones sucesivas; por más que, agrupadas por *pares*, en el órden de magnitud decreciente, los productos binarios de aquellas raices pudieran determinarse con suma facilidad y prontitud. Importa, pues, áun cuando no sea nunca de necesidad absoluta, determinar los valores de las raices por un procedimiento algo más expedito que el general, en el presente y otros casos parecidos: y para esto sirve la descomposicion de la ecuacion propuesta en trinomios reales de segundo grado.

Pero, conocidos ya los valores de v_0 y v'_0, ¿será siempre factible determinar los de f_0 y f'_0 por las fórmulas adecuadas al objeto, insertas en el (§. 17)? ¿por las (a) y (b) del (§. 18) en este caso?—De ningun modo. Los valores de v_0 y v'_0, que acabamos de encontrar, como si se tratase del cálculo de los módulos de las raices imaginarias, pueden ser *positivos* ó *negativos;* y respecto á los verdaderos signos que debemos anteponerles estamos en la más completa ignorancia. Lo único que el signo del último término de la ecuacion (2^0) nos revela es que *una* ó *tres* de sus raices son *negativas:* que si v_0 es positivo, v'_0 será negativo, y viceversa; y con esto sólo no sabemos lo bastante para proceder, con plena seguridad de acierto, á la investigacion de los valores de f_0 y f'_0.

Prescindamos, pues, de la ecuacion (2^0), ya que en su resolucion tropezamos por todas partes con dificultades imprevistas y de índole extraña y como rebelde al análisis, y fijemos por un momento la atencion en la (2^1): resuelta la segunda, como resuelta puede considerarse tambien aquella de donde procede.

De la transformada (2^4) deduciremos los valores de v_2 y v'_2, *positivos ambos* con toda seguridad, como dedujimos los de v_0 y v'_0, de signo incierto y desconocido; por las fórmulas citadas del (§. 18), ó por el procedimiento explicado en el (§. 13), que es en este caso todavía más sencillo, calcularemos los de

f_2 y f'_2: con lo cual la descomposicion en trinomios de segundo grado de la ecuacion (2^1) queda verificada; de estos trinomios, $x^2+f_2x+v_2$ y $x^2+f'_2x+v'_2$, por las fórmulas (42), se deducirán los valores de a^2, b^2, c^2 y d^2; y los de a, b, c y d se concluirán inmediatamente de estos últimos. La condicion de que la suma de estas cuatro *raices*, consideradas en el sentido vulgar algebráico, ha de ser igual en valor, pero de signo contrario, al coeficiente del segundo término de la ecuacion (2^0), bastará muchas veces para determinar los signos de las cuatro; y, si esta condicion no fuese suficiente, la sustitucion en la ecuacion (2^0) de los valores numéricos encontrados, indicará el sentido en que deben tomarse, y disipará cualquier duda que sobre este punto reinare todavía.

Compendiemos en el más breve espacio posible las diversas operaciones que para resolver la ecuacion (2^0) deben por este procedimiento verificarse.

De la (2^4) se deduce que

$$2^3 \times \log v_2 = 28.6102787; \text{ y } 2^3 \times \log v_2 v'_2 = 31.1902400.$$

Los valores de v_2 y v'_2, de estas ecuaciones resultantes, son los siguientes:

$$v_2 = 3769.5098; \text{ y } v'_2 = 2.1013345.$$

Y por las fórmulas (a) y (b) del (§. 18), ó por el método del (§. 13), se deduce luégo que

$$f_2 = 122.98009; \text{ y } f_2' = 3.019909.$$

Con esto, la ecuacion (2^1) se halla ya descompuesta en dos trinomios de segundo grado, cuya resolucion en factores de primero se verificará con auxilio de las fórmulas (42), segun á continuacion se indica:

Primer trinomio.		*Segundo trinomio.*	
$\frac{2\sqrt{v_2}}{f_2} = \text{sen}\,\varphi_2$		$\frac{2\sqrt{v'_2}}{f'_2} = \text{sen}\,\varphi_2'$	
$\log v_2 =$	3.5762848	$\log v'_2 =$	0.3224952
$\log \sqrt{v_2} =$	1.7881424	$\log \sqrt{v'_2} =$	0.1612476
$\log 2 =$	0.3010300	$\log 2 =$	0.3010300
c.° $\log f_2 =$	$\bar{3}.9101652$	c.° $\log f'_2 =$	$\bar{1}.5200061$
$\log \text{sen}\,\varphi_2 =$	$\bar{1}.9993376$	$\log.\ \text{sen}\,\varphi'_2 =$	$\bar{1}.9822837$
$\varphi_2 =$	86°50′11.″0	$\varphi'_2 =$	73°44′43.″6
$^1/_2\,\varphi_2 =$	43°25′ 5.″5	$^1/_2\,\varphi'_2 =$	36°52′21.″8
$\log.\ \text{tang}\,^1/_2\,\varphi_2 =$	$\bar{1}.9760081$	$\log.\ \text{tang}\,^1/_2\,\varphi'_2 =$	$\bar{1}.8751059$
$\log \sqrt{v_2} =$	1.7881424	$\log \sqrt{v'_2} =$	0.1612476
$\log a^2 =$	1.8121343	$\log c^2 =$	0.2861417
$\log b^2 =$	1.7641505	$\log d^2 =$	0.0363535

Y, encontrados ya los logaritmos de a^2, b^2, c^2 y d^2, ó resuelta la ecuacion (2′), como resuelta puede, en efecto, considerarse la (2°). Avanzando un paso más, conclúyese finalmente que

$$\log a = 0.9060671 \qquad \log c = 0.1430708$$
$$\log b = 0.8820752 \qquad \log d = 0.0181767$$

$$a = 8.055030 \qquad c = 1.390179$$
$$b = 7.622110 \qquad d = 1.042742$$

¿Cuáles son los signos de estas cuatro raices?—Negativo el de la primera, ó mayor en absoluto; y positivo el de las otras tres: de otra manera no es posible que la suma de las cuatro sea igual al número + 2, ó al coeficiente del segundo término de la ecuacion (2°), tomado con signo contrario, como debe serlo muy aproximadamente, si en el cálculo de estas raices no se ha cometido algun error de cuantía.

CÁPITULO V.

Resolucion de la ecuacion numérica del grado $2n$, cuyas raices, reales é imaginarias, son desiguales, ó sensiblemente discrepantes unas de otras.

§. 25.

Enunciado del problema y condiciones previas á su resolucion.

Rigurosamente considerado el asunto, la solucion del problema que nos ocupa hállase implícitamente contenida en los capítulos anteriores; siendo menester únicamente para completarla é ilustrarla resumir y generalizar cuanto en las páginas precedentes, en diversos casos particulares y bajo de aspectos muy distintos, queda ya expuesto y muy al pormenor detallado.

Consideremos para ello el caso general de contener la ecuacion propuesta, que se trata de resolver, simultáneamente raices reales é imaginarias; pero con la doble restriccion, por de pronto, de que las raices de ambas especies sean *desiguales*, y de que, distribuidas las reales, por su órden de magnitud absoluta, en distintos *pares*, ningun módulo de las imaginarias se halle comprendido entre las dos raices componentes de cada *par*.—Luégo se examinarán y discutirán los casos excepcionales en que estas condiciones previas fallen ó no se verifiquen.

Multiplicando, si fuere menester, por x la ecuacion propuesta, su *grado* podrá representarse por $2n$, y será susceptible de resolverse ó descomponerse en n trinomios reales de segundo grado, de la forma $x^2 + fx + v$; y tambien en dos solos factores ó polinomios de la misma especie: uno, del grado $2p$, que contendrá todas las raices reales; y otro, del grado $2q$, todas las imaginarias.—Los valores de v son las

verdaderas incógnitas del problema; pues, si por cualquier medio conseguimos determinarlos, los de f se deducirán luégo, sin dificultad teórica, por el procedimiento en los dos últimos capítulos latamente referido.

Téngase ahora muy presente que estos valores de v deben y pueden considerarse como *productos binarios* de dos raices reales, a y b; ó como cuadrados del módulo comun de dos imaginarias, *conjugadas*. Y si las raices de la primera especie, escritas por órden de magnitud decreciente, y distribuidas por *pares*, son éstas:

$$a_1 \text{ y } b_1,\ a_2 \text{ y } b_2,\ a_3 \text{ y } b_3,\ \ldots\ldots;$$

y las de la segunda, por el órden de magnitud de sus módulos y pares de conjugadas, estas otras:

$$g_1(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_1),\ g_2(\cos\varphi_2 \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_2),\ \ldots\ldots;$$

los diversos valores de v, correspondientes á los n trinomios de segundo grado, en que pretendemos descomponer la ecuacion primitiva, podrán representarse del siguiente modo:

$$v_1 = a_1 b_1;\ v_2 = a_2 b_2;\ \ldots\ldots;\ V_1 = g_1^2;\ V_2 = g_2^2;\ \ldots\ldots$$

Y, si entre las magnitudes de estos valores de v establecemos, por ejemplo, la relacion ó dependencia

$$v_1 > V_1 > V_2 > v_2 > V_3 > \ldots\ldots,$$

conviene advertir que no sólo, por hipótesis, g_2^2 será mayor que el producto $a_2 b_2$ $(= v_2)$; sino g_2 mayor tambien que a_2 y que b_2; y no sólo g_3^2 menor que el mismo producto $a_2 b_2 (v_2 > V_3)$, sino menor que a_2 y que b_2. De esta manera ninguno de los módulos consecutivos, g_2 y g_3, se hallará comprendido entre dos raices reales, consecutivas tambien, a_2 y b_2: conforme piden las condiciones preliminares del problema, poco ántes enunciadas.

§. 26.

Resolucion del problema en dos distintos supuestos, ambos muy amplios ó generales.

(*a*)—Figurémonos ahora que la ecuacion propuesta procede del producto de otras dos ecuaciones, una que contenga todas sus raices reales, y la otra todas las imaginarias. La transformada, cuyas raices sean las potencias del grado m de las raices de la primitiva, podrá tambien considerarse como procedente de la multiplicacion de otras dos ecuaciones análogas: una, cuyas raices serán las potencias m de las raices reales que nos proponemos determinar; y, otra, las potencias del mismo grado de las imaginarias. Estas dos últimas ecuaciones, componentes de la final, y respectivamente de los grados $2p$ y $2q$, á condicion de ser $2p+2q=2n$, pueden representarse como sigue, en virtud de todo lo expuesto en los lugares oportunos de los dos primeros capítulos: (51)

$$x^{2p}+P_1x^{2p-1}+P_2x^{2p-2}+P_3x^{2p-3}+P_4x^{2p-4}+\ldots\ldots=0, \text{ y}$$

$$x^{2q}+Q_1x^{2q-1}+Q_2x^{2q-2}+Q_3x^{2q-3}+Q_4x^{2q-4}+\ldots\ldots=0:$$

en las cuales debe entenderse que

$$\left.\begin{array}{l}
P_1=[a_1^m]=a_1^m+b_1^m+a_2^m+b_2^m+\ldots\ldots \\
P_2=[a_1^m b_1^m]=a_1^m b_1^m+a_1^m a_2^m+\ldots\ldots \\
P_3=[a_1^m b_1^m a_2^m]=a_1^m b_1^m a_2^m+a^m b_1^m b_2^m+\ldots\ldots \\
P_4=[a_1^m b_1^m a_2^m b_2^m]=a_1^m b_1^m a_2^m b_2^m+\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}, \text{ y}$$

$$\left.\begin{array}{l}
Q_1 = [f'_m] \\
Q_2 = [g_1^{2m}] + [f'_m f''_m] \\
Q_3 = [g_1^{2m} f'_m] + [f'_m f''_m f''_m] \\
Q_4 = [g_1^{2m} g_2^{2m}] + [g_1^{2m} f''_m f'''_m] + [f'_m f''_m f'''_m f^{IV}_m] \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\}$$

Y multiplicándolas una por otra, é igualando á *cero* su producto, obtendremos la transformada de la ecuacion primera, ó la ecuacion cuyas raices son las potencias m de las mismas raices de aquella que tratamos de resolver. Esta ecuacion, derivada de la primitiva por la regla general del §. 3, y en cuyo exámen debemos ocuparnos, es la siguiente (52):

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
x^{2n} + P_1 & x^{2n-1} + P_2 & x^{2n-2} + P_3 & x^{2n-3} + P_4 & x^{2n-4} + \dots = 0. \\
\quad + Q_1 & \quad + P_1 Q_1 & \quad + P_2 Q_1 & \quad + P_3 Q_1 & \\
 & \quad + Q_2 & \quad + P_1 Q_2 & \quad + P_2 Q_2 & \\
 & & \quad + Q_3 & \quad + P_1 Q_3 & \\
 & & & \quad + Q_4 &
\end{array}$$

Pero, ántes de pasar más adelante, advirtamos ó recordemos tres cosas.

Primera: que el signo [.....] lo es de *suma* de las cantidades que compendia ó simboliza, combinadas entre sí y repetidas de cuantas maneras distintas sea factible verificarlo.

Segunda: que el producto de estas cantidades simbólicas se efectúa como el de las ordinarias comprendidas dentro del corchete ó paréntesis, en términos, por ejemplo, de que

$$P_3 Q_1 = [a_1^m b_1^m a_2^m f'_m];$$

$$P_2 Q_2 = [a_1^m b_1^m g_1^{2m}] + [a_1^m b_1^m f'_m f''_m]; \dots\dots$$

Y, tercera: que entre los símbolos f y g existe la relacion $f_m^{(k)} = 2 g_k^m \times \cos m \varphi_k$: en la cual la letra k indica, en ambos miembros, un número de órden, ó el *par* de raices imaginarias á que las f y g se refieren.

Previas estas advertencias, veamos si la ecuacion (52), muy complicada en la forma, admite algunas notables simplificaciones.

En el coeficiente de su tercer término $(P_2 + P_1 Q_1 + Q_2)$ figura la suma $[f'_m f''_m]$, incomparablemente menor que la $[g_1^{2m}]$, conforme aumenta el valor de m, por razones muy al por menor consignadas en el Capítulo II de esta *Memoria*, y que seria ocioso repetir.

En el del cuarto término de la misma ecuacion se advertiría ó concluiría tambien sin dificultad que, con relacion á la suma $[a_1^m g_1^{2m}]$, la $[a_1^m f'_m f''_m]$ es de todo punto insignificante, lo mismo que la $[f'_m f''_m f'''_m]$ con respecto á la $[g_1^{2m} f''_m]$.

Y en el coeficiente del quinto término podrán igualmente tildarse por insignificantes ó despreciables, cuando m represente un número entero muy elevado, las sumas $[a_1^m b_1^m f'_m f'_m]$, $[a_1^m f'_m f''_m f'''_m]$, $[g_1^{2m} f'_m f''_m]$ y $[f'_m f''_m f'''_m f^{IV}_m]$, en cotejo de las $[a_1^m b_1^m g_1^{2m}]$, $[a_1^m g_1^{2m} f'_m]$ y $[g_1^{2m} g_2^{2m}]$.

En vez de la (52) podremos, en consecuencia, escribir esta otra ecuacion, algo más sencilla ó reducida: (53)

$$x^{2n} + C_1 x^{2n-1} + C_2 x^{2n-2} + C_3 x^{2n-3} + C_4 x^{2n-4} + \ldots\ldots = 0:$$

en la cual, (54)

$$C_1 = [a_1^m] + [f'_m];$$

$$C_2 = [a_1^m b_1^m] + [a_1^m f'_m] + [g_1^{2m}];$$

$$C_3 = [a_1^m b_1^m a_2^m] + [a_1^m b_1^m f'_m] + [g_1^{2m} f''_m];$$

$$C_4 = [a_1^m b_1^m a_2^m b_2^m] + [a_1^m b_1^m a_2^m f'_m] + [a_1^m b_1^m g_1^{2m}] + [g_1^{2m} g_2^{2m}];$$

. . . . . .

. . . . . .

En los coeficientes, C, de esta nueva ecuacion es evidente que las sumas [.....], compuestas de solas raices reales, como $[a_1^m b_1^m a_2^m]$; de solos módulos de imaginarias, como $[g_1^{2m} g_2^{2m}]$; ó de raices reales combinadas con módulos de imaginarias, como $[a_1^m b_1^m g_1^{2m}]$, propenden, conforme m aumenta indefinidamente, á confundirse con sus primeros términos: por hipótesis, los mayores. Pero las sumas en cuya composicion figura alguna f, por la variabilidad en magnitud y signo de estas cantidades, no es fácil, en principio, saber hacia donde convergen, ó de qué modo influyen sobre las demas y sobre el valor final del coeficiente á que corresponden.—La duda, sin embargo, se desvanece si exclusivamente nos fijamos en los coeficientes de órden ó lugar *impar*, tercero, quinto, etc., etc., de la expresada ecuacion (53).

Por ejemplo, el coeficiente, C_2, del tercer término propende á confundirse con esta otra expresion más sencilla:

$$a_1^m b_1^m + [a_1^m f'_m] + g_1^{2m}$$

Pero la suma $[a_1^m f'_m]$ es inferior á $2 a_1^m g_1^m [\cos m \varphi_1]$; y esta última expresion, si $g_1^2 > a_1 b_1$, y $g_1 > a_1$, será despreciable con respecto á g_1^{2m}: ó con respecto á $a_1^m b_1^m$, si las relaciones contrarias de magnitud, entre g_1, y a_1 y b_1, se verifican. Luego aquel coeficiente puede, en el *límite*, ó cuando m sea muy grande, considerarse reducido á $a_1^m b_1^m$ ó á g_1^{2m}: á v_1^m ó á V_1^m.

Pues el coeficiente del quinto término se presta á una reduccion ó simplificacion parecida.

Por de pronto aquel coeficiente puede ser escrito como sigue:

$$a_1^m b_1^m \times a_2^m b_2^m + a_1^m b_1^m \times g_1^{2m} + g_1^{2m} \times g_2^{2m}$$
$$+ [a_1^m b_1^m a_2^m f'_m] + [a_1^m g_1^{2m} f'_m].$$

Y como entre los dos pares de raices reales (a_1 y b_1) y (a_2 y b_2), y los dos módulos, g_1 y g_2, no pueden establecerse más condiciones, compatibles con las preliminares del problema (§. 25), que éstas; (55)

$a_1^m b_1^m > a_2^m b_2^m > g_1^{2m} > g_2^{2m}$, y $a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > g_1 > g_2$;

$a_1^m b_1^m > g_1^{2m} > g_2^{2m} > a_2^m b_2^m$, y $a_1 > b_1 > g_1 > g_2 > a_2 > b_2$;

$a_1^m b_1^m > g_1^{2m} > a_2^m b_2^m > g_2^{2m}$, y $a_1 > b_1 > g_1 > a_2 > b_2 > g_2$; y

$g_1^{2m} > g_2^{2m} > a_1^m b_1^m > a_2^m b_2^m$, y $g_1 > g_2 > a_1 > b_1 > a_2 > b_2$,

resulta que, segun los casos, aquel coeficiente, dividido por $a_1^m b_1^m \times a_2^m b_2^m$, ó por $a_1^m b_1^m \times g_1^{2m}$, ó por $g_1^{2m} \times g_2^{2m}$, propenderá en el *límite* hacia la unidad. Luego el coeficiente, sin modificacion alguna previa, propende, ó hacia el límite $v_1^m v_2^m$, ó el $v_1^m V_1^m$, ó el $V_1^m V_2^m$: en suma, hacia el producto de los dos valores de v, de magnitud absoluta mayor, elevado á la potencia m.

El espíritu de la demostracion es de tal índole, que si la ecuacion (53) la suponemos procedente de la propuesta, resuelta en trinomios de segundo grado, de la forma x^2+fx+v; y si el término v le suponemos procedente tambien de la combinacion, por *pares*, ordenados por su magnitud, de raices reales, ó de dos imaginarias conjugadas, concluiremos de todo lo dicho que, cuando m sea muy grande,—aproximadamente cuándo menos:

$$(56)\quad \begin{cases} C_2 = v_1^m \\ C_4 = v_1^m v_2^m \\ C_6 = v_1^m v_2^m v_3^m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{2r} = v_1^m v_2^m \dots\dots v_r^m \\ C_{2r+2} = v_1^m v_2^m \dots\dots v_r^m v_{r+1}^m \\ C_{2r+4} = v_1^m v_2^m \dots\dots v_r^m \cdot v_{r+1}^m v_{r+2}^m. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

En el caso, pues, que examinamos, general hasta *cierto punto*, ó en que la ecuacion propuesta contenga raices reales é imaginarias, *desiguales* todas, y relacionadas las reales con los módulos de las imaginarias en los términos bien explícitamente referidos (§. 25), los distintos valores de v, de los cuales dependen (Capítulo III) los de f, se deducirán utilizando los coeficientes de lugar *impar*, ó de las potencias *pares* de x, correspondientes á la última ecuacion transformada de la primitiva, por las mismas reglas, compendiadas en el grupo de relaciones (56), que las raices reales, ó los módulos de las imaginarias, se determinaban en los dos casos extremos y más sencillos, ó cuando la ecuacion propuesta sólo contenía raices de una ú otra especie.

(*b*)—Advirtamos ademas que si las $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_r, \ldots\ldots$, corresponden á distintos pares de raices imaginarias conjugadas, y la v_{r+1} á dos raices reales distintas, a y b, siendo $a > b$, no sólo los coeficientes $C_2, C_4, C_6 \ldots\ldots C_{2r}$ propenderán hacia determinados *límites*, conforme la potencia m á que sucesivamente se van elevando las raices de la ecuacion propuesta aumente, sino que de análoga propiedad disfrutará el coeficiente C_{2r+1}.

Este coeficiente puede, en efecto, considerarse como deducido del anterior, combinando con él, por vía de multiplicacion y suma sucesivas, las dos raices reales a y b; y todas las demas de su especie, inferiores á ellas en magnitud, que la ecuacion propuesta contuviere; y cuantas imaginarias, de módulo asimismo inferior á las a y b, contenga todavía: elevadas todas á la potencia m. Y como en la suma de cuantos productos distintos, de $2r+1$ factores cada uno, pueden formarse con las $2n$ raices de la ecuacion propuesta, ó de su derivada final, será el predominante con exceso el primero de los ahora considerados, resulta que el coeficiente C_{2r+1} propenderá, conforme m varíe y aumente, á confundirse con el $C_{2r} \times a^m$.—Por lo tanto, las potencias m de las dos raices reales a y b, y no sólo la de su producto v_{r+1}, se hallarán en este caso, como en el más sencillo que pudiera proponerse, ya considerado en el Capítulo I. dividiendo sucesivamente los coeficientes C_{2r+1} por C_{2r}, y C_{2r+2} por C_{2r+1}.

Pero, si en vez de representar v_{r+1} un producto de dos raices reales consecutivas, a y b, representase el cuadrado del módulo comun de dos imaginarias conjugadas, en la composicion del coeficiente C_{2r+1} figuraría un término igual á $C_{2r} \times 2\, g_{r+1}{}^{m} \cos m\, \varphi_{r+1}$: término, por regla general, de magnitud y signo variable; que predominará sobre todos los demas, cuando m sea muy grande y $\cos m\varphi$ muy poco discrepante de la unidad; y de cuyo signo, indeterminable *à priori*, dependerá entónces el de C_{2r+1}.

Y este mismo valor extremo, $2\, C_{2r} \times (v_{r+1})^{\frac{m}{2}}$, pero de signo invariable, sería tambien en el límite el del coeficiente C_{2r+1}, si las dos raices reales, a y b, fuesen iguales, en vez de diferenciarse sensiblemente, una de otra, como poco ántes supusimos.

Cuando la ecuacion del grado $2\,n$, que se trata de resolver, contenga raices reales é imaginarias, resulta, pues, de cuanto se acaba de exponer y discutir:

1.° Que los coeficientes de lugar *impar* de las transformadas sucesivas serán todos positivos, y propenderán á convertirse en potencias exactas de los diversos productos que con las distintas v pueden formarse.

2.° Que el coeficiente de lugar *par*, anterior al primer coeficiente de lugar impar en cuya composicion entre un producto de dos raices reales,—como el C_{2r+1}, anterior al C_{2r+2},—propenderá tambien á confundirse con una potencia exacta del producto de las v anteriores, multiplicado por la mayor de las dos raices a.

Y 3.° Que el mismo coeficiente de lugar *par*, seguido de otro impar, en cuya composicion figure un nuevo módulo de dos raices imaginarias, variará contínuamente en magnitud y en signo, sin tendencia ó propension á confundirse con ninguna potencia exacta de cantidades reales.—El cambio de signo en las transformadas sucesivas es indicio seguro, como ya tantas otras veces hemos repetido, de que la ecuacion propuesta contiene raices imaginarias.

§. 27.

Estudio de los casos excepcionales, no comprendidos en el párrafo anterior.

Examinemos ahora algunos de los varios casos excepcionales de que en totalidad prescindimos al principio del presente capítulo (§ 25), para simplificar la exposicion de este complicado asunto. Aunque el análisis y discusion de tales casos parezcan, por de pronto, incompletas y poco generales, advertiráse luégo sin esfuerzo que las mismas consideraciones y razonamientos pueden fácilmente ampliarse á cuantos otros casos y dificultades de índole análoga surgieren en la práctica. Más que á prever y discutir cuantas anomalías en la materia de que tratamos son imaginables, propenderán las siguientes advertencias y reflexiones, á familiarizar al lector con los principios del método que debe observar para interpretarlas recta y prontamente, donde y cuando quiera que se presenten.

(a)—Supongamos, en primer lugar, que la ecuacion propuesta tenga tres raices iguales á a, y otra simple, b; y que $a > b$. En la composicion de aquella ecuacion primitiva figurará entónces necesariamente el producto

$$(x+a)^3 \times (x+b) =$$

$$x^4 + (3\,a + b)\,x^3 + (3\,a^2 + 3\,a\,b)\,x^2 + (3\,a^2\,b + a^3)\,x + a^2\,b;$$

y en la de la ecuacion, transformada, cuyas raices sean las potencias m de la primera, este otro:

$(x + a^m)^3 \times (x + b^m)$: cuyo *límite*, admitida la

desigualdad de valores de a y de b, es el siguiente:

$$(57) \qquad x^4 + 3\,a^m\,x^3 + 3\,a^{2m}\,x^2 + a^{3m}\,x + a^{3m}\,b^m.$$

Si las primeras v, desde la v_1 hasta la v_r, son independientes de estas dos raices a y b, el coeficiente C_{2r} podrá escribirse del siguiente modo, conforme lo en el caso general y párrafo precedente expuesto:

$$C_{2r} = v_1^m \, v_2^m \, v_3^m \ldots\ldots v_r^m.$$

Y, para pasar de este coeficiente á los sucesivos, ya dependientes de a y de b, bastará combinarle de todas las maneras posibles con la raiz triple a^m, y la simple b^m, primero; con los productos *binarios, ternarios* y *cuaternarios* de estas mismas raices, luégo; y conservar, por último, en las sumas de productos así resultantes, únicamente los términos como de *órden superior*, y que en cierto modo representan los *límites* hacia los cuales las mencionadas sumas propenden. Procediendo así, obtiénense sin dificultad los siguientes resultados: los mismos que se hubieran obtenido multiplicando el coeficiente C_{2r} por los coeficientes del anterior polinomio, á contar del segundo:

$$(58)\quad \begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times 3\,a^m; \\ C_{2r+2} = C_{2r} \times 3\,a^{2m}; \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times a^{3m}; \quad \text{y} \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^{3m}\,b^m. \end{cases}$$

De donde se deduce que, (59)

$$\frac{C_{2r+1}}{C_{2r}} = 3a^m;\ \frac{C_{2r+2}}{C_{2r+1}} = a^m;\ \frac{C_{2r+3}}{C_{2r+2}} = \frac{1}{3}a^m;\ \text{y}\ \frac{C_{2r+4}}{C_{2r+3}} = b^m.$$

Resultados que comprenden, sin ambigüedad de ningun género, los caracteres de *multiplicidad* de la raiz a, y las reglas á que debemos atenernos para determinar los valores de a y de b: reglas que en nada discrepan de las generales, anteriormente deducidas.

Ni se complica la cuestion, poco ni mucho, por suponer que a sea *menor* que b, en vez de suponerla mayor, como en un principio admitimos. Porque en esta segunda hipótesis reemplazarían, al polinomio (57) este otro:

$$(60) \qquad x^4 + b^m x^3 + 3\, a^m b^m x^2 + 3\, a^{2m} b^m x + a^3 b^m;$$

á los coeficientes del cuadro (58) los que siguen, obtenidos por la combinacion de C_{2r} con los coeficientes del (60):

$$(61) \begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times b^m; \\ C_{2r+2} = C_{2r} \times 3\, a^m b^m; \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times 3\, a^{2m} b^m; \quad \text{y} \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^{3m} b^m; \end{cases}$$

y á los cocientes (59) los (62), igualmente notables por el órden en que se suceden y las relaciones de magnitud de las cantidades que representan:

$$(62) \frac{C_{2r+1}}{C_{2r}} = b^m; \quad \frac{C_{2r+2}}{C_{2r+1}} = 3a^m; \quad \frac{C_{2r+3}}{C_{2r+2}} = a^m; \text{ y } \frac{C_{2r+4}}{C_{2r+3}} = \frac{1}{3} a^m.$$

La existencia, pues, de raices *iguales* en la ecuacion propuesta, ni complica apénas la solucion general de la misma ecuacion, ni puede ser causa de notable ambigüedad ó duda al interpretar los distintos resultados que se obtuvieren, procediendo, por de pronto, como á ciegas en la investigacion de todas las raices.

(b)—Y, en segundo lugar, continuemos suponiendo que la ecuacion propuesta contenga una raiz real, g, igual al módulo de dos imaginarias conjugadas, *asociada* con otra, a, real tambien y menor que g: ó, en más sucintos términos, supongamos que en la composicion de la ecuacion primitiva figura este producto:

$$(x^2 + f x + g^2)\,(x + g)\,(x + a),$$

ó el polinomio equivalente

$$x^4+(a+f+g)x^3+(ag+af+fg+g^2)x^2+(afg+ag^2+g^3)x+ag^3.$$

En la ecuacion final, transformada de la primera, entrará tambien como factor este otro polinomio: (63)

$$x^4+(a^m+f_m+g^m)x^3+(a^m g^m+a^m f_m+g^m f_m+g^{2m})x^2+$$
$$(a^m g^m f_m+a^m g^{2m}+g^{3m})x+a^m g^{3m}.$$

Y precisamente los coeficientes de este polinomio, á contar del segundo, son los que deben combinarse por vía de multiplicacion con el C_{2r} para hallar los coeficientes *límites* sucesivos de la ecuacion transformada que se busca. En efecto: si los valores de v, desde v_1 hasta v_r, son independientes de las cuatro raices,—dos imaginarias y dos reales,—á que ahora atendemos, del valor de C_{2r} se deducirán los de C_{2r+1}, C_{2r+2}, ..., multiplicando el primero, sucesivamente, por aquellas cuatro raices, que son las mayores de su especie, no consideradas todavía, y reuniendo en una suma los cuatro productos asi obtenidos; y verificando despues operaciones análogas con los productos *binarios*, *ternarios* y *cuaternario* de las mismas raices. Los resultados finales, suponiendo ya muy elevado el valor de m, puede, sin error sensible, admitirse que se reducen á estos:

$$(64)\quad \begin{cases} C_{2r+1}=C_{2r}\times(a^m+f_m+g^m); \\ C_{2r+2}=C_{2r}\times(a^m g^m+a^m f_m+g^m f_m+g^{2m}); \\ C_{2r+3}=C_{2r}\times(a^m g^m f_m+a^m g^{2m}+g^{3m}); \text{ y} \\ C_{2r+4}=C_{2r}\times a^m g_3{}^m. \end{cases}$$

Pero, llegados á este punto, conviene advertir que el coeficiente $a^m+f_m+g^m$ es indeterminado en magnitud y en signo.—En efecto: por ser $g>a$, conforme m aumente, la potencia a^m adquirirá un valor relativo cada vez menor, y

despreciable al fin, comparada con la g^m; y el trinomio considerado redúcese entónces al binomio $f_m + g^m$. Pero el término f_m puede variar entre $-2g^m$ y $+2g^m$: luego la indeterminacion del trinomio, y, por lo tanto, del coeficiente á que corresponde, C_{2r+1}, es inevitable en el curso de las transformaciones sucesivas de la ecuacion propuesta.

Lo propio sucede con el coeficiente C_{2r+2}.—Porque, en el *límite*, el polinomio $a^m g^m + a^m f_m + g^m f_m + g^{2m}$ se reduce al binomio $g^m f_m + g^{2m}$; y, como el primer término de este binomio puede variar entre $-2g^{2m}$ y $+2g^{2m}$ no hay medio en realidad de asignar límite alguno hacia el cual propenda el mencionado coeficiente.

Mas el C_{2r+3} tiene un valor final determinado: porque en el polinomio $a^m g^m f_m + a^m g^{2m} + g^{3m}$, el último término predomina al fin sobre todos los demás, hasta anularlos por completo casi. Y de la misma propiedad goza el C_{2r+4}, y por razon mucho más fácilmente perceptible todavía.

En resúmen: los cuatro coeficientes que en el caso ahora examinado siguen al C_{2r}, en la transformada (2^m), podrán escribirse de este modo:

$$(65)\begin{cases} C_{2r+1} = (?); \\ C_{2r+2} = (?); \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times g^{3m}; \quad \text{y} \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times g^{3m} a^m. \end{cases}$$

El carácter, pues, de este caso excepcional es el de presentarse en las transformadas sucesivas dos coeficientes *consecutivos*, indeterminados en magnitud y en signo. Mas, prescindiendo de estos dos coeficientes, rebeldes al análisis, los valores de g y de a se deducen inmediatamente, de los dos siguientes y del anterior á ellos, por el procedimiento sencillísimo y general ántes expuesto.

Si en vez de suponer que $g > a$, admitiésemos que $a > g$, al cuadro de relaciones algebráicas (65) reemplazaría este otro:

$$(66)\begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times a^{m}; \\ C_{2r+2} = (?) \\ C_{2r+3} = (?) \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^{m}\, g^{3m}: \end{cases}$$

y las consecuencias de su análisis serían las mismas que en la hipótesis anterior.

(*c*)—No *dos* coeficientes consecutivos, sino *tres*, *cinco*, ..., coeficientes, variables con incesante irregularidad, nos resultarían en las transformadas sucesivas, si, en tercer lugar, considerásemos el caso de que la ecuacion propuesta contuviese *dos*, *tres*, ... *pares* de raices imaginarias, no precisamente iguales, sino dotadas del mismo módulo: como, despues de todo lo expuesto y referido, sería fácil tarea, aunque un poco larga y fastidiosa, demostrar.

(*d*)—Y, por último, y para no insistir más en asunto tan sencillo en la práctica como difícil y complicado en teoría, por su mucha generalidad y variabilidad interminable, supongamos que entre dos raices reales, a y b, de la ecuacion propuesta, se halle comprendido el módulo, g, de dos imaginarias conjugadas.—En aquella ecuacion figuraría entónces el producto

$$(x^2 + fx + g^2)\,(x + a)\,(x + b),$$

equivalente á este polinomio:

$$x^4 + (a + b + f)\,x^3 + (ab + af + bf + g^2)\,x^2 + \\ (abf + ag^2 + bg^2)\,x + abg^2.$$

Y este polinomio, suponiendo que

$$(67) \quad a > g > b,$$

se convierte en la última ecuacion, transformada de la primitiva, en el que sigue:

$$(68)\quad x^4 + (a^m + f_m)\,x^3 + (a^m\,b^m + a^m\,f_m + g^{2m})\,x^2 + (a^m\,b^m\,f_m + a^m\,g^{2m})\,x + a^m\,b^m\,g^{2m}.$$

Verificándose la doble condicion (67), puede, sin embargo, suceder que g^2 sea mayor que $a\,b$, ó menor, ó igual á este producto; pero en los tres casos el coeficiente de x^3, en el polinomio (68), propenderá hacia el *límite* a^m; el de x^2 resultará indeterminado, en magnitud y signo; y los de x^1 y x^0 propenderán evidentemente hacia los límites $a^m\,g^{2m}$ y $a^m\,b^m\,g^{2m}$.—Por lo tanto, suponiendo que los valores de v, desde v_1 hasta v_r inclusive, sean independientes de las cuatro raices que ahora consideramos, nos resultará que

$$(69)\quad \begin{cases} C_{2r} = v_1^{\,m}\,v_2^{\,m}\,v_3^{\,m}\,\ldots\ldots\,v_r^{\,m}; \\ C_{2r+1} = C_{2r} \times a^m; \\ C_{2r+2} = (?) \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times a^m\,g^{2m}; \qquad \text{y} \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^m\,b^m\,g^{2m} \end{cases}$$

Ó, en términos vulgares, nos resultará *indeterminado* un solo coeficiente de lugar *impar:* anomalía distinta de todas las advertidas en los demas casos excepcionales anteriormente examinados; pero de ninguna trascendencia en el asunto. Pues, prescindiendo de aquel coeficiente, nada más fácil y expedito que hallar los valores de a, g^2 y b, con auxilio de los otros dos inmediatos, anteriores y posteriores, entre los cuales se encuentra comprendido.

(*e*)—En conclusion: siempre que las raices, reales ó imaginarias, discrepen unas de otras sensiblemente, la aplicacion, hasta irreflexiva, más ó ménos veces reiterada de la regla del (§. 3), nos proporcionará una ecuacion, derivada de la pro-

puesta, de cuyos coeficientes, *limitados* todos, ó alternativa, regular ó irregularmente, limitados ó indeterminados, podremos deducir los valores de aquellas raices, ó de sus módulos, ó de sus productos binarios, distribuidos por órden de magnitud. Y la solucion completa del problema no pide tampoco más que esto último, segun lo expuesto y demostrado en los dos capítulos anteriores.

Ni áun la condicion previa, en el presente admitida como necesaria para simplificar la exposicion del asunto,—la de que sea de grado *par* la ecuacion que se trata de resolver,—tiene importancia alguna, ni siquiera objeto, en la práctica: porque, aplicando cuantas veces fuere menester la regla del (§. 3), obtendremos siempre una nueva ecuacion, de cuyos coeficientes, *limitados*, en el sentido convencional atribuido á esta palabra, en totalidad ó sólo en parte, segun la naturaleza de las raices y las relaciones de magnitud que entre las reales y los módulos de las imaginarias existan, imposibles de prever por de pronto, se desprenderán luégo los valores de aquellas raices y de los módulos con ellas combinados y como inseparables en la ecuacion primitiva.

Bastará resolver un par de ejemplos muy sencillos para adquirir la certidumbre, en algun modo experimental, de lo que acabamos de decir, y penetrarse de la generalidad y fecundidad del método de investigacion y análisis expuesto. La prueba material no es necesaria, ni prueba nada apénas, tras el razonamiento teórico; pero tampoco suele pecar de ociosa nunca.

§. 28.

Ejemplos y síntesis del método.

(*a*)—Como primer ejemplo, propongámonos hallar las raices ó factores de la ecuacion

$$5x^3 + 7x^2 + 22 = 0,$$

equivalente á esta otra:

$$(2^0)\ x^3 + 1.4\,x^2 + 4.4 = 0.$$

Las dos primeras transformadas, directamente construidas por la regla del (§. 3), son las siguientes:

$$(2^1)\ x^3 + 1.96\,x^2 - 12.32\,x + 19.36 = 0;\ \text{y}$$

$$(2^2)\ x^3 + 28.4816\,x^2 + 75.8912\,x + 374.8096 = 0,$$

El cambio de signo del coeficiente de x nos indica que no todas las raices de la ecuacion (2^0) son reales: y como una, por lo ménos, debe serlo, conclúyese que las otras dos serán imaginarias.

Reemplazando los coeficientes de la (2^2) por sus *logaritmos*, y aplicando luégo tres veces consecutivas la misma regla de derivacion de nuevas ecuaciones, obtiénense sin dificultad estos resultados:

$$(2^2)\ x^3 + 1.45456\,x^2 + 1.88019\,x + 2.57381 = 0$$

$$(2^3)\ x^3 + 2.81916\,x^2 - 4.19286\,x + 5.14762 = 0$$

$$(2^4)\ x^3 + 5.66839\,x^2 + 7.76185\,x + 10.29524 = 0$$

$$(2^5)\ x^3 + 11.33654\,x^2 - 16.17769\,x + 20.59048 = 0.$$

En la transformada (2^6) el coeficiente de x^2 sería igual al duplo del mismo coeficiente en la (2^5); el de x volvería á cambiar de signo: y el de x^0 se obtendría, como siempre, y lo mismo que el de x^2 ahora, por simple *duplicacion* del que le corresponde en la precedente. Las operaciones de transformacion ó derivacion terminan, pues, en la (2^5).

Y de esta ecuacion se concluye, sin dificultad, que

$$2^5 \times \log a = 11.33654;\quad \text{y}\quad 2^5 \times \log a\,b\,c = 20.59048$$

$$\text{ó}\ \left.\begin{array}{l}\log a = 0.354267\\ \log b\,c = 0.289186\end{array}\right\};\ \text{y}\ \left.\begin{array}{r}a = 2.26083\\ (b\,c) = g^2 = 1.94619\end{array}\right\}.$$

Conocemos, pues, ya con esto la raiz real, a,—negativa en el sentido vulgar algebráico; y el cuadrado, g^2, del módulo de las dos imaginarias conjugadas. El valor de f, que al trinomio $x^2 + fx + g^2$ corresponde, se deduce en el ejemplo propuesto de esta sencillísima condicion:

$$+2.26083 + f = +1.4$$

Y, con el grado de aproximacion que el uso de las tablas logarítmicas de *cinco* cifras decimales permite obtener, conclúyese finalmente que

$$5\,(x^2 - 0.86083\,x + 1.94619)\,(x + 2.26083) = 5x^3 + 7x^2 + 22$$

(*b*)—Algo más complicado que el anterior es el siguiente segundo ejemplo, que pasamos á resolver.

$$(2^0)\quad x^5 - 7x^4 + 103x^3 - x^2 - 1834x - 11824 = 0.$$

Reemplazando los coeficientes de esta ecuacion por sus logaritmos, y calculando luégo los de su primera transformada con *siete* cifras decimales, para evitar muy desde el principio la acumulacion de errores, obtiénense por de pronto, estos resultados:

$$(2^0)\quad x^5 - 0.8450980\,x^4 + 2.0128372\,x^3 - 0.0000000\,x^2 - 3.2633993\,x - 4.0727644 = 0$$

$$(2^1)\quad x^5 - 2.1958997\,x^4 + 3.8405452\,x^3 + 5.7350715\,x^2 + 6.5237345\,x + 8.1455288 = 0.$$

Limitemos ahora la aproximacion á la compatible con el uso de logaritmos de *cinco* cifras; y como de la ecuacion (2^0) se ha deducido la (2^1), así de ésta se desprenderán sucesivamente, y cada vez con mayor facilidad, las cuatro que siguen:

$$(2^2)\quad x^5 + 4.03322\,x^4 + 8.35271\,x^3 + 11.31186\,x^2 - 14.14851\,x + 16.29106 = 0$$

$$(2^3)\quad x^5 - 8.52377\,x^4 + 16.66313\,x^3 + 23.02486\,x^2 + 28.07188\,x + 32.58212 = 0$$

$$(2^4)\quad x^5 + 16.28980\,x^4 + 33.34053\,x^3 + 46.00544\,x^2 + 55.76589\,x + 65.16424 = 0$$

$$(2^5)\quad x^5 - 33.60217\,x^4 + 66.68102\,x^3 + 92.00979\,x^2 + 110.64963\,x + 130.32848 = 0.$$

Si de la última ecuacion nos propusiésemos todavía deducir la (2^6), advertiríamos: que el coeficiente de x^4 cambiaba otra vez de signo y conservaba su carácter ya manifiesto de indeterminacion ó variabilidad irregular; que los de x^3 y x^2 se obtenian, por el contrario, *duplicando* los de estas mismas potencias de x en la (2^5); y que el de x^1, como el de la x^4, continuaba indeterminado. Del último coeficiente no hay que preocuparse; pues en éste, como en cualquiera otro caso, obtiénese siempre dicho coeficiente por duplicacion del que le corresponde en la precedente transformada, con independencia completa de todos los demas.

De la ecuacion (2^5) sólo podremos, en consecuencia de lo advertido, utilizar *tres* coeficientes para resolver la (2^0); y como ésta contiene *cinco* raices, la solucion resultará incompleta, por de pronto, y se limitará á determinar los valores aproximados de la única raiz *real*, que aquella ecuacion comprende, y de los dos módulos de sus cuatro raices imaginarias. A renglon seguido se expresan las ecuaciones de condicion que han de servir para esto, y los resultados finales que de ellas se desprenden:

$$\left.\begin{array}{l} 2^5 \times \log ab = 66.68102 \\ 2^5 \times \log abc = 92.00979 \\ 2^5 \times \log abcde = 130.32848 \end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l} \log ab = 2.083782 \\ \log c = 0.791524 \\ \log de = 1.197458 \end{array}\right\};\ \text{y}$$

$$ab = g^2 = 121.278;\quad c = 6.18764;\quad \text{y}\quad de = g_1^2 = 15.7564.$$

Para determinar ahora los valores de f y f_1, que á los de g^2 y g_1^2 corresponden, habría que considerar la ecuacion propuesta como de *sexto grado*, multiplicando para ello todos sus términos por x; y aplicar á esta investigacion las fórmulas (a'') y (b'') del (§. 18). Pero esto, que ya en otro ejemplo análogo se practicó, y que es lo más directo é irreprochable en teoría, puede, en casos como el presente, simplificarse y abreviarse en gran manera, por el método del (§. 13).

Si, en efecto, la ecuacion (2°) la consideramos como equivalente á esta otra:

$$(x^2 + fx + g^2)(x^2 + f_1 x + g_1^2)(x + c) = 0,$$

conclúyese por necesidad ineludible que

$$f + f_1 + c = -\ 7, \quad \text{y}$$

$$g^2 g_1^2 + c g^2 f_1 + c g_1^2 f = -1834.$$

Luego los valores de f y f_1, despues de conocidos los de g^2, g_1^2 y c, dependen de la resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Sustituyendo por g^2 y g_1^2 sus actuales valores, *positivos*, y por e el que le corresponde tambien, con signo contrario al de la *raiz algebráica* que representa, ó con el signo *ménos*, dedúcese de aquellas ecuaciones que

$$f = -6.66922, \quad \text{y} \quad f_1 = +5.85686.$$

La solucion de la ecuacion propuesta, (2°), queda así completada, con el grado de aproximacion, un poco exagerado ó ficticio tal vez, que las tablas auxiliares de logaritmos de *cinco* cifras consienten. Y si fuere menester ó conviniere cerciorarse de la exactitud de los cinco valores de g^2 y f_1, g_1^2 y f_1, y c, y rectificarlos, en caso de necesidad, habría que emplear el procedimiento y fórmulas, adecuadas al objeto, y en los párrafos (8) y (14) consignadas.—Sobre este punto no hay ya nada nuevo que advertir.

(c)—De mayor reparo es digna la aparente ligereza con

que, del exámen de las transformadas sucesivas de la ecuacion (29), y, muy en particular, de la (2^5), hemos concluido que aquella primera ecuacion contenía *una* sola raiz real y *cuatro* imaginarias. ¿Por qué no serían reales *tres* é imaginarias *dos* únicamente? ¿Y por qué entónces el producto *ab* ó el *de*, en vez de representar el *cuadrado*, forzosamente *positivo*, de un módulo, no representaría el simple producto *binario* de dos raices reales, acaso *negativo*, contra lo supuesto en el cálculo posterior de f y f_1?

Repasemos muy por encima las diversas consideraciones teóricas en esta *Memoria* expuestas, con aplicacion al ejemplo de que ahora se trata; y no sólo resultará justificado lo que se acaba de practicar, sino que, tal vez, se disipe la ténue oscuridad que, al discurrir en el asunto, pudiera ofuscarnos todavía.

Si las cinco raices, — a, b, c, d y e, — de la ecuacion propuesta fuesen *reales*, los coeficientes de todas las transformadas serían *positivos*. No lo son todos: luego el primer supuesto resulta inadmisible.

Mas pudieran ser reales *tres*, y existir entre ellas y el módulo, g, de las otras *dos*, estas relaciones de magnitud absoluta:

$$a > b > c > g.$$

Pues en la transformada cuyas raices fuesen las de la propuesta, elevadas á la potencia m, conforme este número aumentase, se verificaría entónces: que el coeficiente del segundo término contendría la potencia m de a, superior con grandísimo exceso á las demas potencias ó cantidades con ella combinadas, por vía de adicion ó suma; que el del tercer término contendría la misma potencia, dotada de igual ó análoga propiedad, del producto binario ab; y que el del cuarto contendría la del producto ternario abc, incomparablemente mayor asimismo que las potencias m de los demas productos de este nombre que con las cinco raices pueden formarse. Y, por lo tanto, los tres coeficientes mencionados, variables de signo alguna vez, en las primeras transformadas, concluirían por ser *positivos*, y por convergir hácia *límites* determinados. Falla

tambien la consecuencia en el ejemplo resuelto: luego la condicion previa, de donde lógicamente se desprende, debe calificarse de errónea é inadmisible.

É inadmisible sería análogamente cualquiera otra en que el módulo g no ocupase el primer lugar, por órden de magnitud, en las relaciones, parecidas á la anterior, que entre él y las raices reales se establecieren. Pues bastaría que a fuese mayor que g, áun cuando g superase á b y c, para que en el coeficiente del segundo término de las transformadas sucesivas predominase la potencia m de a sobre todas las demas; y para que, en consecuencia, adquiriese este coeficiente el signo *positivo* y un valor *determinado*, ó independiente de los que le preceden y siguen en la anteúltima de las ecuaciones, por la regla del (§. 3), derivadas de la primitiva.

Resta, pues, saber si es ó no admisible esta otra condicion preliminar:

$$g > a > b > c.$$

Cierto que en las transformadas sucesivas el término, de signo indeterminado, $2\,g^m \cos m\,\varphi$, puede entónces predominar sobre los a^m, b^m y c^m, y de este predominio resultar indeterminacion en el signo y en la magnitud de su segundo coeficiente, conforme se advierte en las transformadas de nuestro ejemplo; pero los demas coeficientes deberán, al fin, ser *positivos* y *limitados* todos: el tercero porque g^{2m} representa un número, en cotejo del cual se desvanecen las demas cantidades que á la composicion de aquel coeficiente concurren; y los cuarto y quinto porque $g^{2m}\,a^m$ y $g^{2m}\,a^m\,b^m$ son tambien incomparablemente superiores á los demas productos análogos, en estos últimos coeficientes comprendidos. Con relacion al ejemplo que se discute, la consecuencia final no es cierta en todas sus partes: luego la hipótesis de donde procede no puede considerarse como admisible tampoco.—Luego la ecuacion (2°) no poseerá *dos* solas raices imaginarias; sino *cuatro: precisamente* TANTOS PARES *como coeficientes indeterminados comprende su última transformada.*

Tan importante consecuencia se infiere de un razonamien-

to y conjunto de reflexiones, aplicables, con variantes de mera forma, á cualquier otro caso ó ejemplo, y, por lo tanto, completamente generales en el fondo. El contenido de este capítulo, y áun de toda la *Memoria*, queda así compendiado en dos palabras.

(*d*)—Propongámonos todavía resolver un ejemplo más, un poco rebuscado, pero muy interesante, relacionado con la doctrina del §. 27, y que nos servirá como de punto de partida para llegar sin violencia al capítulo siguiente.

Sea, pues, la ecuacion de 5° grado

$$(2^0) \qquad x^5 - 32x^3 + 72x^2 - 185x + 360 = 0,$$

cuya primera transformada es la que sigue:

$$(2^1) \qquad x^5 + 64x^4 + 654x^3 - 6656x^2 - 17615x + 129600 = 0.$$

Sustituyendo al cálculo directo el logarítmico, obtiénense sucesivamente estos resultados:

$$(2^1) \qquad x^5 + 1.8061800x^4 + 2.8155777x^3 - 3.8232133x^2 - 4.2458826x + 5.1126050 = 0$$

$$(2^2) \qquad x^5 + 3.4452928x^4 + 6.0949788x^3 + 7.9239253x^2 + 9.3086761x + 10.2252100 = 0$$

$$(2^3) \qquad x^5 + 6.7229658x^4 + 12.0353233x^3 + 15.3163755x^2 + 18.1218550x + 20.4504200 = 0$$

$$(2^4) \qquad x^5 + 13.4108037x^4 + 24.0624897x^3 + 30.1534264x^2 + 35.7661749x + 40.9008400 = 0$$

$$(2^5) \qquad x^5 + 26.8200923x^4 + 48.1249556x^3 + 59.8318580x^2 + 71.0571465x + 81.8016800 = 0$$

$$(2^6) \qquad x^5 + 53.6401819x^4 + 96.2499112x^3 + 119.1954429x^2 + 141.6443493x + 163.6033600 = 0$$

Los coeficientes de x^4 y de x^3 en la transformada (2^7) son, ó pueden ya suponerse, *cuadrados* perfectos de sus correspondientes en la (2^6); y de estos dos coeficientes fácil será, por lo tanto, deducir los valores de *dos raices* de la ecuacion primitiva, *reales* por necesidad. Y siendo aquella ecuacion de grado *impar*, alguna otra raiz deberá ser *real* tambien: luego las imaginarias, indicadas por los signos negativos de la (2^1), no pasarán de *dos*, en el ejemplo propuesto.

Pero los coeficientes de x^2 y de x, aunque positivos siempre, desde la transformada (2^2) en adelante, ni en la (2^3) son cuadrados perfectos de los correspondientes en la anterior, ni como tales podrán considerarse tampoco en las sucesivas, hasta llegar á una de órden muy elevado.

Luego la ecuacion (2^0) contiene *dos* raices reales, que fácilmente se aislan ó desprenden de las demas; y *tres* que, *numéricamente*, deben discrepar muy poco entre sí, cuando tanto trabajo cuesta separarlas, por más que en algun otro concepto sean muy diferentes. Por de pronto debemos, pues, limitarnos á escribir las tres siguientes consecuencias de la ecuacion (2^6):

$$\left.\begin{array}{l} 2^6 \times \log a = 53.6401819; \\ 2^6 \times \log ab = 96.2499112; \\ 2^6 \times \log abcde = 163.6033600 \end{array}\right\} \text{ó} \left\{\begin{array}{l} \log a = 0.83812784; \\ \log b = 0.66577702; \text{ y} \\ \log cde = 1.05239764. \end{array}\right.$$

Si, en efecto, fuesen iguales las tres raices, designadas por c, d y e, el logaritmo de su *cubo* sería conocido, y el valor comun de las tres raices se deduciría inmediatamente. Pero ¿cómo cerciorarse de que son absolutamente iguales, ó de que difieren poquísimo unas de otras?—No es fácil la respuesta, en términos generales por lo ménos.

Advertiremos, sin embargo, que si fuesen iguales, por lo explicado en el §. 27, los coeficientes de x^2, x y x^0 propenderían respectivamente hácia los *límites*

$$3\,(a\,b\,c)^{2^m},\ 3\,(a\,b\,c^2)^{2^m} \quad \text{y} \quad (a\,b\,c^3)^{2^m}.$$

Luego, con alguna aproximacion á la verdad, podríamos

escribir estas relaciones, que de la consideracion de la transformada (2^6) se deducen:

$$2^6 \times \log ab = 96.2499112;$$

$$2^6 \times \log abc = 119.1954429 - \log 3;$$

$$2^6 \times \log abc^2 = 141.6443493 - \log 3; \text{ y}$$

$$2^6 \times \log abc^3 = 163.6033600.$$

Y combinando la primera con la segunda, la segunda con la tercera, y la tercera con la cuarta, se concluirán estos tres valores de log *c:*

$$\log c = 0.3510689;\ 0.3507641;\ \text{ó}\ 0.3505646.$$

La pequeña discrepancia de estos logaritmos puede provenir, ó de discrepar en realidad las tres raices buscadas, ó de no representar todavía la ecuacion (2^6) el *límite* ó la transformada final de la (2^0) con suficiente grado de aproximacion. Lo único, pues, averiguado es que, ademas de las raices *a* y *b*, contiene la ecuacion propuesta otra ú otras raices, cuyo logaritmo aproximado es 0.3508..., ó el valor numérico comun 2,25... Y con este primer valor, y por la regla de Newton, será menester calcular otro y otros, hasta llegar al punto de aproximacion apetecido.

Y que la regla de Newton es aplicable en este caso se infiere del hecho incuestionable de no contener la ecuacion propuesta más de *una* raiz real, á la cual el número 2.25 se aproxime. Pues si, por el contrario, contuviese *tres*, las cinco raices serían reales, y la transformada (2^1) debería poseer todos sus términos positivos. No los posee: luego, en virtud de cuanto precede, dos de aquellas cinco raices son *imaginarias*, y el número 2.25... se aproximará á la única raiz real desconocida todavía, distinta de las *a* y *b*.

Mas, si las tres raices *c*, *d* y *e* son de especie diversa, *imaginarias* dos y *real* una, ¿cómo, ni por un momento, hemos podido suponer que fuesen exacta ó aproximadamente iguales?—Muy sencillo.

La transformada (2^6) asi lo es de la (2^0) como de la (2^1): de la (2^0), que contiene *dos raices imaginarias*, como lo prueba la existencia del signo negativo en la (2^1); y de la (2^1), que no contiene ninguna de aquella especie ó nombre, conforme lo indican los signos positivos de todos los términos de todas las transformadas sucesivas, hasta la (2^6) inclusive, y las que á continuacion pudieran deducirse.

¿Y de qué *forma* deben ser las raices imaginarias de la (2^0) para convertirse en *reales* en la (2^1), por la simple elevacion al cuadrado?—De ésta: $\pm\beta\sqrt{-1}$; y no de la general, $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$.

La observacion es evidente, y tan importante que nos da la clave para acabar de resolver con grandísima sencillez y por completo la ecuacion primitiva (2^0).

En efecto: las dos raices a y b son ya conocidas; y la c, considerada como real tambien, debe ser tal que, sumada con ellas, reproduzca el coeficiente de x^4, igual á *cero* en este caso: con lo cual esta c puede asimismo darse por determinada. Y como el coeficiente, 360, del último término es igual al producto de las *tres* raices reales por el cuadrado del módulo de las *dos* imaginarias, conocidas ya aquellas tres raices, sencillísimo será tambien averiguar lo que el módulo, β ó g, aproximadamente vale. Los valores de las cinco raices, por tan breve procedimiento obtenidos, son, en fin de cuentas, los que siguen:

$$a = -6.888550;$$

$$b = +4.632091;$$

$$c = +2.256459; \text{ y}$$

$$d = -e = +2.236068\sqrt{-1}.$$

(e)—Como ejercicios sobre esta misma materia, concluiremos proponiendo al lector los tres siguientes ejemplos, que debe empeñarse en resolver.

1.° $x^5 + 2x^2 + 3x + 4 = 0.$

Para hallar las tres raices de esta ecuacion, real una y dos imaginarias, hay que avanzar hasta la transformada (2^9). Pero las cuatro primeras transformadas pueden obtenerse muy sencillamente, sin apelar á las tablas de logaritmos. Y de la (2^9) basta conocer el coeficiente del segundo término.

Las tres raices buscadas son éstas:

$$x = -1.650629; \text{ y}$$

$$x = -0.174685 \pm 1.546869 \times \sqrt{-1}$$

2.° $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0.$

De la transformada (2^8) se deducen los siguientes valores de sus cuatro raices imaginarias:

$$x = -1.287816 \pm 0.857897 \times \sqrt{-1}; \text{ y}$$

$$x = +0.287816 \pm 2.832186 \times \sqrt{-1}$$

3.° $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0.$

Como en los casos precedentes, las cuatro primeras transformadas se deducirán sin el auxilio de los logaritmos con suma sencillez. Mas el trabajo de cálculo habrá de prolongarse luégo hasta el segundo término de la (2^{10}) para separar por completo unas de otras y determinar sus cinco raices. Estas son las que siguen:

$$x = -1.491798;$$

$$x = -0.805786 \pm 1.222905 \times \sqrt{-1}; \text{ y}$$

$$x = +0.551685 \pm 1.253349 \times \sqrt{-1}$$

CAPITULO VI.

Exámen del caso excepcional en que la ecuacion numérica propuesta contenga dos ó más raices de cualquier especie, muy poco discrepantes unas de otras.

—

§. 29.

Dificultad, no considerada hasta ahora, que puede presentarse en la resolucion de las ecuaciones numéricas.

El procedimiento de resolucion de las ecuaciones numéricas, en los precedentes capítulos expuesto, sólo puede suministrarnos por de pronto los valores de las raices buscadas con un cierto grado de aproximacion. Si estos valores aproximados discrepan notablemente unos de otros, por la regla de Newton, tambien en los anteriores capítulos inserta, se determinarán luégo y con bastante sencillez sus correcciones respectivas, y se deducirán nuevos valores de las incógnitas á que se refieren, más aproximados á la verdad ó más dignos de confianza que los en primer término obtenidos. Y, repitiendo las operaciones de rectificacion dos, tres ó más veces consecutivas, la discrepancia entre los resultados que por fin se obtuvieren y los que pretendemos desde un principio deducir, si no nula, será, por lo ménos, insignificante y despreciable.

Pero, cuando los valores que deben corregirse discrepen poquísimo unos de otros, ó sea su diferencia menor que el *duplo* de la correccion hipotética, obtenida por la regla de Newton, fallará ó podrá fallar esta regla de cálculo; y, aplicándola sin discernimiento y muy previsora reflexion á la deduccion de nuevos valores de las raices buscadas, nos desviará entónces del recto camino que para esto conviene seguir,

y nos hará perder infructuosamente el tiempo. Hasta pudiera suceder que dos ó más de aquellos primeros valores aproximados, que se trata de corregir, fuesen absolutamente iguales, sin serlo en todo rigor las raices á que se refieren ó corresponden; y entónces ni esperanza cabría de obtener por la simple regla de Newton la separacion ó distincion de tales raices, unas de otras muy poco diferentes, ó *casi iguales*. Respetando, pues, como bueno el procedimiento de solucion preliminar y general en esta MEMORIA desenvuelto, habrá que modificar ó ampliar aquella regla complementaria de aproximacion indefinida, para que, con plena seguridad de acierto, pueda tambien aplicarse en los casos excepcionales que se acaban de indicar. La modificacion estriba en las relaciones existentes entre una funcion algebráica, racional y entera, y las *derivadas* suyas de diversos órdenes, que vamos á exponer ahora.

§. 30.

Digresion importante, necesaria para salvar la dificultad propuesta en el párrafo precedente.

Sea la funcion

$$(70) \qquad f(x) = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots\ldots$$

Diferenciándola una sola vez, ó pasando de la funcion propuesta á su *primera derivada*, obtendremos este resultado: (71)

$$\frac{df}{dx} = (x+b)(x+c)(x+d)\ldots + (x+a)(x+c)(x+d)\ldots +$$
$$(x+a)(x+b)(x+d)\ldots + (x+a)(x+b)(x+c)\ldots + \ldots =$$
$$\left\{\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} + \frac{1}{x+d} + \ldots\right\} \times f(x) = \varepsilon_1 \times f(x).$$

La segunda *diferenciacion* produciría este otro: (72)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2f}{dx^2}=$$

$$(x+c)(x+d)\ldots+(x+b)(x+d)\ldots+(x+a)(x+d)\ldots+$$

$$(x+a)(x+c)\ldots+(x+a)(x+b)\ldots+(x+b)(x+c)\ldots+\ldots=$$

$$\left\{\frac{1}{(x+a)(x+b)}+\frac{1}{(x+a)(x+c)}+\ldots\right\}\times f(x)=\varepsilon_2\times f(x).$$

Ó representando, en general, por ε_m la expresion

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)\ldots}+\frac{1}{(x+a)(x+c)\ldots}+\ldots+\frac{1}{(x+b)(x+c)\ldots}+\ldots,$$

compuesta de una suma de fracciones, cuyo numerador comun sea la unidad, y cuyos denominadores comprendan los diversos productos que pueden formarse combinando, sin repeticion, de m en m, los n binomios $x+a$, $x+b$, $x+c$, ..., los resultados de las diferenciaciones consecutivas de la ecuacion (70) serán los que á renglon seguido se insertan:

$$(73)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{df}{dx}=\varepsilon_1\times f(x)\\[2ex]\dfrac{1}{1.2}\cdot\dfrac{d^2f}{dx^2}=\dfrac{d\left(\varepsilon_1\times f(x)\right)}{2\,dx}=\varepsilon_2\times f(x)\\[2ex]\dfrac{1}{1.2.3}\cdot\dfrac{d^3f}{dx^3}=\dfrac{d\left(\varepsilon_2\times f(x)\right)}{3\,dx}=\varepsilon_3\times f(x)\\[2ex]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Para demostrar la certidumbre de la ley á que en su formacion obedecen claramente estas expresiones analíticas, supongamos que se verifique ó sea verdadera en los primeros casos particulares, hasta el m inclusive; y veamos si tambien

se verificará forzosamente entónces en el caso ó supuesto inmediato posterior.

Por hipótesis, pues, consideraremos como ya demostrado que

$$(74)\qquad \frac{1}{1.2.3.....m}\cdot\frac{d^m f}{dx^m}=\frac{d\left(\varepsilon_{m-1}\times f(x)\right)}{m.dx}=\varepsilon_m\times f(x).$$

En el segundo miembro de esta igualdad figuran tantos términos distintos como combinaciones diversas, sin repeticion, pueden formarse de $n-m$ en $n-m$, ó de m en m, con los n elementos $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... : ó

$$\frac{n(n-1)(n-2).\ ...(n-m+1)}{1.2.3.....m}$$

términos, con $n-m$ elementos ó factores binomios cada uno. Y como, al diferenciarla, cada uno de estos términos producirá tantos otros distintos como factores ahora le componen, ó $n-m$, en el segundo miembro de la siguiente igualdad, consecuencia inmediata de la (74),

$$(75)\qquad \frac{1}{1.2.3...m}\cdot\frac{d^{m+1}f}{dx^{m+1}}=\frac{d\left(\varepsilon_m\times f(x)\right)}{dx},$$

existirán por de pronto, ó prescindiendo de las reducciones que puedan luégo verificarse, $n-m$ veces más términos que en el segundo de donde procede, ó

$$\frac{n(n-1)(n-2).....(n-m+1)(n-m)}{1.2.....m}$$

en totalidad, compuesto cada uno de $n-m-1$ factores binomios.—Las *reducciones* de términos provendrán de existir entre los $n-m$, que cada uno de los comprendidos en la expresion $\varepsilon_m\times f(x)$ produce por derivacion, alguno ó varios iguales á los que, por derivacion ó diferenciacion asimismo,

se desprenden de los demas en aquella expresion primitiva contenidos.

En esta otra expresion análoga: $\varepsilon_{m+1} \times f(x)$, los términos, compuestos tambien de $n-m-1$ factores binomios, ascienden á $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{1.2\ldots\ldots m(m+1)}$: ó son, por definicion ó hipótesis, tantos como combinaciones distintas pueden formarse con los n factores de $f(x)$, tomados de $n-m-1$ en $n-m-1$, ó de $m+1$ en $m+1$. Y como si consideramos aparte uno de estos términos, y le multiplicamos por cualquiera de los binomios en él deficientes, obtendremos por precision alguno de los comprendidos en la expresion simbólica $\varepsilon_m \times f(x)$, resulta, recíprocamente, que ni uno solo de los comprendidos en $\varepsilon_{m+1} \times f(x)$ dejará de figurar tambien entre los de $\frac{d\left(\varepsilon_m \times f(x)\right)}{dx}$. Pero esta última expresion, que no contiene término alguno distinto de los comprendidos en la anterior, contiene, sin embargo, en totalidad $m+1$ veces más términos: luego cada uno de estos términos se hallará repetido las mismas $m+1$ veces. De donde se deduce, conforme queríamos demostrar, que: (76)

$$(m+1) \times \varepsilon_{m+1} \times f(x) = \frac{d\left(\varepsilon_m \times f(x)\right)}{dx} = \frac{1}{1.2.3\ldots m} \cdot \frac{d^{m+1} f}{dx^{m+1}}$$

La ley de formacion á que las expresiones (73) obedecen, directamente comprobada en los primeros casos particulares, es, segun esto, general y aplicable sin vacilacion en todos.

§. 31.

Análisis del problema cuando son dos, tres ó más las raices iguales ó casi *iguales que la ecuacion propuesta contiene.*

(*a*)—Previos estos preliminares indispensables, suponga-

mos ahora *aproximadamente* conocido uno de los valores de x, ($x_0 = -a_0$, por ejemplo), que satisfacen á la ecuacion

$$f(x) = (x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots = 0.$$

Si, en lugar de x, ponemos en esta ecuacion $x_0 + \Delta x_0$, nos resultará esta otra: (77)

$$f(x_0 + \Delta x_0') =$$

$$f(x_0) + \frac{df}{dx_0} \cdot \Delta x_0 + \frac{d^2f}{dx_0^2} \cdot \frac{\Delta x_0^2}{1.2} + \frac{d^3f}{dx_0^3} \cdot \frac{\Delta x_0^3}{1.2.3} + \ldots\ldots =$$

$$f(x_0) \times \{1 + \varepsilon_{01} \Delta x_0 + \varepsilon_{02} \Delta x_0^2 + \varepsilon_{03} \Delta x_0^3 + \ldots\ldots\} = 0.$$

Los valores de ε_0 se deducen de los de ε, en el párrafo anterior definidos, por la simple sustitucion de la letra x por x_0, ó por $-a_0$. Conclúyese, pues, que: (78)

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{a-a_0} + \frac{1}{b-a_0} + \frac{1}{c-a_0} + \ldots\ldots$$

$$\varepsilon_{02} = \frac{1}{(a-a_0)(b-a_0)} + \frac{1}{(a-a_0)(c-a_0)} +$$

$$\frac{1}{(a-a_0)(d-a_0)} + \ldots\ldots + \frac{1}{(b-a_0)(c-a_0)} + \ldots\ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

Si a_0 es un número que difiere poquísimo de a é incomparablemente más de $b, c, d, \ldots\ldots$; ó, en otros términos: si $-a_0$ es valor aproximado de *una sola* de las raices de la ecuacion propuesta, las fracciones componentes de ε_0, en cuyos denominadores figure el factor $a-a_0$, serán incomparablemente mayores que todas las demas; y, por lo tanto, los valores de las diferentes ε_0 quedarán, *aproximadamente* tambien, reducidos á éstos en el presente caso:

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{a-a_0}; \quad \varepsilon_{02} = \frac{M}{a-a_0}; \quad \varepsilon_{03} = \frac{N}{a-a_0}; \ldots\ldots$$

Expresiones abreviadas las últimas, en las cuales las letras M, N, ... representan cantidades finitas, ó sumas de fracciones, de denominador finito, combinadas con la $\frac{1}{a-a_0}$ en el sistema (78).

Sustituyendo en el último miembro de la ecuacion (77) por las ε_0 estos valores aproximados á la verdad, y tanto más aproximados cuanto menor sea la diferencia $a-a_0$, dedúcese la siguiente:

$$(79) \qquad 1 + \varepsilon_{01} . \Delta x_0 + \varepsilon_{02} . \Delta x_0^2 + \varepsilon_{03} . \Delta x_0^3 + \ldots\ldots =$$

$$1 + \frac{\Delta x_0}{a-a_0} + \frac{M . \Delta x_0^2}{a-a_0} + \frac{N . \Delta x_0^3}{a-a_0} + \ldots\ldots = 0.$$

Pero siendo, por hipótesis, Δx_0 y $a-a_0$ cantidades ambas muy pequeñas, aunque del mismo órden de magnitud, la fraccion $\frac{\Delta x_0}{a-a_0}$ representará una cantidad finita; y, comparadas con ella, serán cantidades muy pequeñas á su vez, y de valor insignificante ó despreciable unas con respecto á otras, todas las demás fracciones que le siguen y acompañan. Luego, en el supuesto de que $-a_0$ sea valor aproximado de *una sola raiz* de la ecuacion primitiva, conclúyese de la (79) que

$$1 + \frac{\Delta x_0}{a-a_0} = 1 + \varepsilon_{01} \times \Delta x = 1 + \frac{\frac{df}{dx_0}}{f(x_0)} \times \Delta x_0 = 0$$

De donde se desprende que

$$(80) \qquad \Delta x_0 = a_0 - a = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}:$$

conforme en un todo con la regla de aproximacion, incontrovertible sólo en este caso, prescrita como general por Newton.

(b)—Pues si, por el contrario, $-a_0$ es valor aproximado de *dos raices*, ó si a y b, en vez de discrepar sensiblemente, difieren poquísimo una de otra, vamos á ver que la precedente conclusion no puede admitirse como cierta. Entónces, en efecto, (81)

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{a-a_0} + \frac{1}{b-a_0} + \text{términos despreciables;}$$

$$\varepsilon_{02} = \frac{1}{(a-a_0)(b-a_0)} + \text{id. id.;}$$

$$\varepsilon_{03} = \frac{M}{(a-a_0)(b-a_0)};\ \varepsilon_{04} = \frac{N}{(a-a_0)(b-a_0)};\ \ldots\ldots$$

Con lo cual la ecuacion (77) se transformará en la que sigue:

$$(82)\quad 1 + \varepsilon_{01}.\Delta x_0 + \varepsilon_{02}.\Delta x_0^2 + \varepsilon_{03}.\Delta x_0^3 + \ldots\ldots =$$

$$1 + \Delta x_0 \left\{ \frac{1}{a-a_0} + \frac{1}{b-a_0} \right\} + \frac{\Delta x_0^2}{(a-a_0)(b-a_0)} +$$

$$\frac{M.\Delta x_0^3}{(a-a_0)(b-a_0)} + \frac{N.\Delta x_0^4}{(a-a_0)(b-a_0)} + \ldots\ldots = 0.$$

Como cantidades finitas pueden considerarse en esta ecuacion las fracciones $\frac{\Delta x_0}{a-a_0}$, $\frac{\Delta x_0}{b-a_0}$ y $\frac{\Delta x_0^2}{(a-a_0)(b-a_0)}$; puesto que numerador y denominador son del mismo órden de magnitud absoluta. Pero las fracciones siguientes, cuyos numeradores, por la introduccion sucesiva del factor muy pequeño Δx_0, disminuyen cada vez más rápidamente, deberán ó podrán tildarse como insignificantes, en parangon con las primeras. Luego, en el nuevo supuesto que ahora examinamos, de ser a_0 valor comun aproximado de a y de b, nos resultará que

$$1+\Delta x_0\left(\frac{1}{a-a_0}+\frac{1}{b-a_0}\right)+\Delta x_0^2\cdot\frac{1}{(a-a_0)(b-b_0)}=$$

$$\left(1+\frac{\Delta x_0}{a-a_0}\right)\left(1+\frac{\Delta x_0}{b-a_0}\right)=0;\quad \text{ó}$$

$$(83)\quad 1+\varepsilon_{01}.\Delta x_0+\varepsilon_{02}.\Delta x_0^2=1+\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\Delta x_0+\frac{f''(x_0)}{f(x_0)}\cdot\frac{\Delta x_0^2}{2}=0$$

Resolviendo esta última ecuacion, se obtendrán para Δx_0 *dos* valores: *reales* y *desiguales*, si a y b son reales y su discrepancia de valor comienza en este punto; reales, pero *iguales*, si a y b son absolutamente iguales, ó si la primera aproximacion no basta para poner en claro todavía su pequeña divergencia; é *imaginarios* ambos, si a y b son raices de esta especie.

(*c*)—En el último de estos tres supuestos, ó cuando el valor *real*, a_0, sea valor aproximado de dos *imaginarias*, a y b, estas raices, completadas por la resolucion de la ecuacion (83), serán de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, una, y de la conjugada, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, la otra. Con la particularidad notable de que β representará entónces una cantidad real muy pequeña, ó del mismo órden de magnitud que $\alpha-a_0$. En efecto: la ecuacion (83) exige que el denominador de ε_{01} sea del mismo órden que $a-a_0$, ó que Δx_0; y como

$$\varepsilon_{01}=\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}-a_0}+\frac{1}{\alpha-\beta\sqrt{-1}-a_0}=\frac{2}{(\alpha-a_0)+\frac{\beta^2}{\alpha-a_0}},$$

si β no es cantidad muy pequeña, ε_{01} lo será; y $\varepsilon_{01}\times\Delta x_0$, que hemos considerado como cantidad finita, podría muy bien ser insignificante ó despreciable.

(*d*)—El caso general, ó aquel en que la ecuacion propuesta tenga m raices *iguales* ó *casi iguales*, cuyo valor comun aproximado sea $-a_0$, no necesita, despues de cuanto llevamos expuesto y discutido, explanarse muy detenidamente. En

vez de la ecuacion (83), que puede escribirse de este otro modo

$$f(x)+\Delta x_0 \times f'(x_0)+\frac{\Delta x_0^2}{2}\times f''(x_0)=0,$$

y que es aplicable al caso de *dos* raices iguales ó muy poco diferentes, obtendriamos la que sigue, cuando las raices de esta especie fuesen *tres:*

$$f(x_0)+\Delta x_0 \times f'(x_0)+\frac{\Delta x_0^2}{1.2}\times f''(x_0)+\frac{\Delta x_0^3}{1.2.3}\times f'''(x_0)=0.$$

Y, cuando fuesen m, esta otra: (84)

$$f(x_0)+\Delta x_0 \times f'(x_0)+\ldots\ldots+\frac{\Delta x_0^m}{1.2.3\ldots\ldots m}\times f^m(x_0)=0.$$

Los m valores de Δx_0, que de esta ecuacion se dedujeren, serían las correcciones que al valor comun *aproximado*, $-a_0$, deberíamos aplicar para deducir las m raices, *casi iguales*, de la ecuacion propuesta. Y es claro que, segun la divergencia más ó ménos perceptible de estas m raices, así los m valores de Δx_0 serán más ó ménos divergentes unos de otros, y, en consecuencia, ménos ó más difíciles de encontrar. Pero imposibilidad teórica de hallarlos no existe; y las dificultades prácticas ni invalidan el procedimiento de investigacion, ni, ménos, le acreditan de erróneo. Son dificultades insuperables, como inherentes al problema, y comunes á todos los métodos propuestos ó que pudieran en adelante proponerse para su resolucion.

(*e*)—Para llegar á las conclusiones precedentes hemos, en general, supuesto que el valor $-a_0$ lo era aproximado de dos ó más raices *reales*, casi iguales: supongamos ahora que se trata de raices *imaginarias*, muy poco diferentes, y veremos que las consecuencias ni en la apariencia casi discrepan de las ya deducidas. Rigurosamente pensando, y en atencion á la índole del razonamiento que precede, no habría necesidad de

modificar ó ampliar en este segundo concepto la investigacion, ya en el primero verificada. Mas nada se perderá, sin embargo, por insistir un poco más sobre esta tan interesante materia.

Representemos, pues, por $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ un valor aproximado, comun á las dos expresiones $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ y $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$; ó supongamos que la ecuacion propuesta contiene dos pares de raices imaginarias, $-\alpha \mp \beta\sqrt{-1}$ y $-\alpha' \mp \beta'\sqrt{-1}$, muy poco divergentes una de otra. Si β_0 es cantidad muy pequeña, el valor *real* de x_0, igual á $-\alpha_0$ sería el valor aproximado que debería servirnos para hallar los de Δx_0; y el caso coincidiría con el ya anteriormente (*c*) examinado. A las suposiciones preliminares debemos agregar la de que β_0, y, por lo tanto, β y β', sean cantidades finitas, y de ningun modo despreciables ó evanescentes.

Si en la expresion

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{a-a_0} + \frac{1}{b-a_0} + \frac{1}{c-a_0} + \frac{1}{d-a_0} + \ldots\ldots$$

en vez de $a, b, c, d, \ldots$ ponemos $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, $\alpha'-\beta'\sqrt{-1}, \ldots$; y por a_0 el valor imaginario aproximado $\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}$, nos resultará esta otra:

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{(\alpha-\alpha_0)+(\beta-\beta_0)\sqrt{-1}} + \frac{1}{(\alpha'-\alpha_0)+(\beta'-\beta_0)\sqrt{-1}} +$$

$$\frac{1}{(\alpha-\alpha_0)-(\beta+\beta_0)\sqrt{-1}} + \frac{1}{(\alpha'-\alpha_0)-(\beta'+\beta_0)\sqrt{-1}} + \ldots\ldots$$

Por hipótesis se sabe, ó debe admitirse como cierto, que $\alpha-\alpha_0$, $\alpha'-\alpha_0$, $\beta-\beta_0$ y $\beta'-\beta_0$ son cantidades muy pequeñas; pero no $\beta+\beta_0$, ni $\beta'+\beta_0$, ni las demas cantidades análogas que figurarían en la composicion de los denominadores, sucesivos á los expresos en la fórmula anterior.

El valor ó los valores buscados de Δx_0 han de ser tambien de la forma comun $M+N\sqrt{-1}$: en la cual M y N

representan, en términos generales, cantidades reales muy pequeñas. Por lo tanto, el primer término de la expresion simbólica $\varepsilon_{01} \times \Delta x_0$ será igual á

$$\frac{M+N\sqrt{-1}}{(\alpha-\alpha_0)+(\beta-\beta_0)\sqrt{-1}}=$$

$$\frac{\{M+N\sqrt{-1}\}\times\{(\alpha-\alpha_0)-(\beta-\beta_0)\sqrt{-1}\}}{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2}=$$

$$\frac{M_1+N_1\sqrt{-1}}{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2}:$$

designando por M_1 y N_1 sumas de productos de dos cantidades reales muy pequeñas: ó cantidades, en general tambien, del mismo órden de magnitud absoluta que $(\alpha-\alpha_0)^2$ y $(\beta-\beta_0)^2$. Luego aquel primer término de $\varepsilon_{01} \times \Delta x_0$ podrá representarse por $M_2+N_2\sqrt{-1}$, si M_2 y N_2 designan los resultados de dividir unas por otras cantidades en magnitud comparables, ó cocientes finitos.

Y lo dicho á propósito del primer término puede repetirse sin variante cuando se trate del segundo.

Pasemos al tercero; que será de la forma

$$\frac{M+N\sqrt{-1}}{(\alpha-\alpha_0)-(\beta+\beta_0)\sqrt{-1}}=$$

$$\frac{\{M+N\sqrt{-1}\}\times\{(\alpha-\alpha_0)+(\beta+\beta_0)\sqrt{-1}\}}{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta+\beta_0)^2}=$$

$$\frac{\{M(\alpha-\alpha_0)-N(\beta+\beta_0)\}+\{N(\alpha-\alpha_0)+M(\beta+\beta_0\}\sqrt{-1}}{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta+\beta_0)^2}.$$

En el numerador de la última fraccion adviértese que las cantidades $M(\alpha-\alpha_0)$ y $N(\alpha-\alpha_0)$,— productos de dos factores muy pequeños,— se hallan parangonadas, y combinadas

por adicion, con las $N(\beta+\beta_0)$ y $M(\beta+\beta_0)$, procedentes de la multiplicacion de los factores, muy reducidos, N y M por $\beta+\beta_0$, que se supone finito, ó de un órden de magnitud muy superior. Y una cosa parecida se observa tambien en el denominador del mismo quebrado, compuesto de dos solos términos: evanescente, el primero; y el segundo finito y de valor relativo muy considerable. Luego, *aproximadamente*, y tanto más cuanto ménos discrepen α y α_0, los cuales, por la índole propia del problema, propenden á confundirse uno con otro, aquel tercer término de $\varepsilon_{01}\times\Delta x_0$, que ahora en particular consideramos, se reducirá á

$$\frac{-N+M\sqrt{-1}}{\beta+\beta_0}:$$

que sobre el primero, ántes representado por $M_2+N_2\sqrt{-1}$, ejercerá influencia muy poco notable.

Y como lo propio que del tercero cabe decir del cuarto, y de todos los demas consecutivos, resulta, en conclusion, que en la expresion $\varepsilon_{01}\times\Delta x_0$ sólo serán términos eficaces, y que merezcan llevarse en cuenta, los dos primeros.

Pues por consideraciones análogas, é igualmente sencillas, infiérese asimismo que en la expresion $\varepsilon_{02}\times\Delta x_0^2$ sólo el primer término es comparable en magnitud con los dos primeros en la precedente conservados; y que, en cotejo con estos tres términos, ninguno de los comprendidos en las expresiones análogas, $\varepsilon_{03}\times\Delta x_0^3$, $\varepsilon_{04}\times\Delta x_0^4$, ..., merece respetarse.

Concuerdan, pues, estas premisas con las establecidas poco há (*b*), como si sólo de la existencia de dos raices *reales*, casi iguales, se tratara; y, por lo tanto, la consecuencia entónces deducida debe considerarse como general ó aplicable á todos los casos. Cuando se conozca, segun esto, un valor aproximado de x, de la forma $x_0=-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}$, que corresponda á dos raices imaginarias de la ecuacion propuesta, casi iguales, la separacion de estas raices, ó el cálculo de las correcciones de x_0, podrá verificarse construyendo y resolviendo la misma ecuacion auxiliar (83).

Pero es de advertir ó recordar que, si la ecuacion primitiva contiene dos raices imaginarias, casi iguales, de la forma $-\alpha-\beta\sqrt{-1}$, tambien contendrá otras dos de la $-\alpha+\beta\sqrt{-1}$; y, en consecuencia, sustituyendo en la (83), por x_0, el valor aproximado $-\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}$, obtendríamos luégo estas raices. Y si ambas sustituciones se verificasen en la ecuacion auxiliar citada sucesivamente, y uno por otro multiplicásemos los resultados así obtenidos, formaríase una ecuacion final de cuarto grado, cuyas raices serían los cuatro valores buscados de Δx_0, iguales todavía ó ya diferentes, segun la coincidencia ó divergencia de las cuatro raices de la ecuacion propuesta, cuyo primer valor aproximado designa la expresion $-\alpha_0\mp\beta_0\sqrt{-1}$, que nos sirve de punto de partida.

El caso en que la ecuacion contuviese tres raices imaginarias casi iguales, ó tres pares de raices conjugadas, representadas aproximadamente por $-\alpha_0\mp\beta_0\sqrt{-1}$, se resolvería de un modo análogo; ó dependería de la resolucion de dos ecuaciones de tercer grado, ó de una sola de sexto, formadas por la misma ley y procedimiento que las de segundo y cuarto grados en el precedente. Y el caso general, despues de cuanto en este párrafo llevamos referido, tampoco presentaría dificultad alguna teórica nueva.

§. 32.

Extension del método de Newton al problema en este capítulo considerado.

(*a*)—La ecuacion auxiliar (84) puede escribirse en esta otra forma, ya considerada anteriormente y más útil en la práctica:

$$f(x_0)+x_0 f'(x_0)\times\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)+\frac{1}{2}x_0^2 f''(x_0)\times\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2+$$

$$\frac{1}{1.2.3}x_0^3 f'''(x_0)\times\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^3+\ldots=0.$$

Ó en la adjunta, análoga tambien á otras anteriores, (85)

$$[x_0^n] + [n x_0^n] \times (\Delta \log x_0) + \frac{1}{2}[n(n-1)x_0^n] \times (\Delta \log x_0)^2 +$$

$$\frac{1}{6}[n(n-1)(n-2)x_0^n] \times (\Delta \log x_0)^3 + \ldots\ldots = 0,$$

si representamos simbólicamente las funciones ó expresiones algebráicas

$$f(x_0),\quad x_0 f'(x_0),\quad x_0^2 f''(x_0),\quad x_0^3 f'''(x_0), \ldots\ldots, \text{ por}$$

$$[x_0^n],\quad [n x_0^n],\quad [n(n-1)x_0^n],\quad [n(n-1)(n-2)x_0^n], \ldots.$$

que, á contar de la primera, de significacion bien clara, se desprenden unas de otras como sigue.

La $[n x_0^n]$, multiplicando sucesiva y respectivamente los términos de la $[x_0^n]$ por n, $n-1$, $n-2$, ... El último de aquellos términos, multiplicado por $n-n$, dará *cero* de producto, y desaparecerá de la nueva expresion que se trata de obtener.

La $[n(n-1)x_0^n]$ multiplicando de análogo modo los términos de la $[n x_0^n]$ por $n-1$, $n-2$, $n-3$, ..., hasta por $n-n$.

Y de ésta la que sigue, y así todas las demás consecutivas, por multiplicaciones de los términos de la que últimamente se hubiere formado, sucesivamente por los números $n-2$, $n-3$, ..., ó $n-3$, $n-4$, ..., etc., etc., siempre hasta el $n-n$.

La incógnita de la ecuacion (85) es $\Delta \log x_0$, si se trata de logaritmos *neperianos;* ó $M \times \Delta \log x_0$, si los logaritmos son los vulgares ó de Briggs. El *módulo M*, en este caso, vale 0.4342945; cuyo logaritmo, vulgar tambien, es igual á $\overline{1}$,6377843.

(*b*)—Ninguna otra advertencia importante hay que agregar á lo dicho cuando de la separacion de raices reales, casi iguales, exclusivamente se trata; mas, cuando versa el problema sobre la distincion de dos ó más raices imaginarias, el asunto

puede presentarse bajo nueva faz, digna de consideracion y estudio.

El valor aproximado comun de estas raices, $-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}$, puede, en efecto, designarse de este otro modo: $-g_0(\cos\varphi_0+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_0)$; y si en la ecuacion auxiliar (85) ponemos por x_0 esta expresion, nos resultará la que sigue: (86)

$$\left\{P\cos Q+\rho\cos\psi.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)+{}^1/_2\,\rho'\cos\psi'.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2+\right.$$

$$\left.{}^1/_6\,\rho''\cos\psi''.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^3+\ldots\ldots\right\}+$$

$$\left\{P\,\text{sen}\,Q+\rho\,\text{sen}\,\psi.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)+{}^1/_2\,\rho'\,\text{sen}\,\psi'.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2+\right.$$

$$\left.{}^1/_6\,\rho''\,\text{sen}\,\psi''.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^3+\ldots\ldots\right\}\times\sqrt{-1}=0;$$

en la cual, por g_0 y φ_0, por P y Q, ρ y ψ, ρ' y ψ', ..., deberán sustituirse los valores de estas cantidades que de las relaciones adjuntas se deduzcan: (87)

$$\left.\begin{array}{r}
\alpha_0=g_0\cos\varphi_0\\
[(-g_0)^n\cos n\,\varphi_0]=P\cos Q\\
[n\,(-g_0)^n\cos n\,\varphi_0]=\rho\cos\psi\\
[n\,(n-1)\,(-g_0)^n\cos n\,\varphi_0]=\rho'\cos\psi'\\
[n\,(n-1)\,(n-2)\,(-g_0)^n\cos n\,\varphi_0]=\rho''\cos\psi''\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}.\ \text{y}$$

$$\left.\begin{array}{r}
\beta_0 = g_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \\
[(-g_0)^n \operatorname{sen} n\,\varphi_0] = P \operatorname{sen} Q \\
[n\,(-g_0)^n \operatorname{sen} n\,\varphi_0] = \rho \operatorname{sen} \psi \\
[n\,(n-1)\,(-g_0)^n \operatorname{sen} n\,\varphi_0] = \rho' \operatorname{sen} \psi' \\
[n\,(n-1)(n-2)\,(-g_0)^n \operatorname{sen} n\,\varphi_0) = \rho'' \operatorname{sen} \psi'' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}.$$

Y si, en vez de x_0, hubiésemos puesto el valor $-\alpha_0+\beta_0\sqrt{-1}$, igual á $-g_0(\cos\varphi_0-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi_0)$, la ecuacion resultante sólo se hubiera diferenciado de la (86) por el signo de todos los términos multiplicados por el radical imaginario $\sqrt{-1}$. Ambas ecuaciones se funden en una sola, cuyas raices serán las correcciones que deben aplicarse á las dos conjugadas $-\alpha_0 \mp \beta_0\sqrt{-1}$, conforme á lo advertido al final del párrafo anterior, elevando al cuadrado la (86), despues de pasar á su segundo miembro los términos afectados del expresado radical imaginario. El resultado de esta sencilla operacion, ó la ecuacion final que buscamos es la siguiente:

$$\left\{P\cos Q+\rho\cos\psi.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)+{}^1/_2\,\rho'\cos\psi'.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2+\ldots\right\}^2+$$

$$\left\{P\operatorname{sen} Q+\rho\operatorname{sen}\psi.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)+{}^1/_2\,\rho'\operatorname{sen}\psi'.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2+\ldots\right\}^2=0.$$

(*c*)—Prescindamos con esto del caso más complicado y general que en el asunto puede presentarse, y limitémonos al exámen minucioso de los dos particulares más sencillos.

Si, por de pronto suponemos que el valor de x_0, igual á $-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}$, lo es aproximado de una sola raiz de la ecuacion propuesta, $-\alpha-\beta\sqrt{-1}$, la correccion, Δx_0, de este

valor se desprenderá de la ecuacion auxiliar siguiente, á que se reduce entónces la (86):

$$P(\cos Q + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,Q) + \rho(\cos\psi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\psi)\frac{\Delta x_0}{x_0} = 0.$$

De la cual se deduce que

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -\frac{P}{\rho}\left\{\cos(Q-\psi) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(Q-\psi)\right\}.$$

Pero tambien, por definicion casi,

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{(\alpha-\alpha_0) + (\beta-\beta_0)\sqrt{-1}}{\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{(g\cos\varphi - g_0\cos\varphi_0) + (g\,\text{sen}\,\varphi - g_0\,\text{sen}\,\varphi_0)\sqrt{-1}}{g_0(\cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_0)}.$$

O, multiplicando numerador y denominador del último quebrado por $\cos\varphi_0 - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_0$, y verificando luégo algunas reducciones sencillísimas,

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -1 + \frac{g}{g_0}\cos(\varphi-\varphi_0) + \sqrt{-1}\,.\,\frac{g}{g_0}\,\text{sen}\,(\varphi-\varphi_0).$$

Y de la comparacion de ambos valores de Δx_0 se desprenden estas nuevas relaciones:

$$(88)\quad \begin{cases} \dfrac{g}{g_0}\cos(\varphi-\varphi_0) = 1 - \dfrac{P}{\rho}\cos(Q-\psi), \text{ y} \\[2ex] \dfrac{g}{g_0}\,\text{sen}\,(\varphi-\varphi_0) = -\dfrac{P}{\rho}\,\text{sen}\,(Q-\psi). \end{cases}$$

Adviértase ahora que φ y g son los límites hacia los cuales indefinidamente se aproximan φ_0 y g_0; ó que $\varphi-\varphi_0$, igual á $\Delta\varphi_0$, debe ser cantidad muy pequeña; y discrepar

tambien muy poco de la unidad la relacion $\frac{g}{g_0}$, equivalente á $1+\omega$, si ω designa otra cantidad del órden de magnitud que $\Delta\varphi_0$. Por lo tanto, el primer miembro de la primera ecuacion (88),

$$\frac{g}{g_0}\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{g}{g_0}\left\{1-\tfrac{1}{2}(\Delta\varphi_0)^2+\ldots\right\},$$

podrá muy aproximadamente considerarse reducido á la simple relacion $\frac{g}{g_0}$. Y el primero de la segunda

$$\frac{g}{g_0}\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_0)=(1+\omega)\left\{\Delta\varphi_0-\tfrac{1}{6}(\Delta\varphi_0)^3+\ldots\right\},$$

como igual á $(1+\omega)\Delta\varphi_0$, ó simplemente á $\Delta\varphi_0$.

Con lo cual á las mencionadas relaciones (88) reemplazarán las siguientes, ya consignadas en el §. 14, y deducidas entónces por procedimiento algo distinto y ménos general: (89)

$$\Delta\log g_0=-\frac{PM}{\rho}\cos(Q-\psi);\ \text{y}\ \Delta\varphi_0=-\frac{P}{\rho}\frac{\operatorname{sen}(Q-\psi)}{\operatorname{sen}1''}.$$

Pues supongamos ahora que $-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}$ sea valor aproximado de *dos* raices imaginarias, casi iguales, $-\alpha-\beta\sqrt{-1}$ y $-\alpha'-\beta'\sqrt{-1}$, de la ecuacion propuesta.

La correccion Δx_0, que deberá tener dos distintos valores, si las raices no son absolutamente iguales, se calculará resolviendo la ecuacion auxiliar siguiente, en que se convierte en este caso la general (86):

$$P(\cos Q+\sqrt{-1}\operatorname{sen}Q)+\rho(\cos\psi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\psi)\frac{\Delta x_0}{x_0}+$$

$$\tfrac{1}{2}\rho'(\cos\psi'+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\psi')\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2=0.$$

De la cual, inmediatamente, se deduce esta otra:

$$\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 + 2\frac{\rho}{\rho'}\left\{\cos(\psi-\psi') + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(\psi-\psi')\right\}\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right) +$$

$$\frac{2P}{\rho'}\left\{\cos(Q-\psi') + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(Q-\psi')\right\} = 0.$$

Y de ésta la que sigue: (90)

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -\frac{\rho}{\rho'}\left\{\cos(\psi-\psi') + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(\psi-\psi')\right\} \pm$$

$$\frac{\delta}{\rho'}(\cos\gamma + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\gamma),$$

si suponemos que δ y γ proceden de la resolucion de las dos siguientes ecuaciones:

$$(91)\quad \begin{cases} \delta^2\cos 2\gamma = \rho^2\cos 2(\psi-\psi') - 2P\rho'\cos(Q-\psi'), & \text{y} \\ \delta^2\,\mathrm{sen}\,2\gamma = \rho^2\,\mathrm{sen}\,2(\psi-\psi') - 2P\rho'\,\mathrm{sen}\,(Q-\psi') \end{cases}$$

Pero, en términos generales, y como por definicion, conforme poco ántes se verificó, tambien puede escribirse, representando por l y L dos nuevas indeterminadas, que

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{(g\cos\varphi - g_0\cos\varphi_0) + \sqrt{-1}\,(g\,\mathrm{sen}\,\varphi - g_0\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)}{g_0(\cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)} =$$

$$\frac{l(\cos L + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,L)}{g_0(\cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)} = \frac{l}{g_0}\left\{\cos(L-\varphi_0) + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(L-\varphi_0)\right\}$$

Y de la comparacion de estos dos valores ó expresiones de Δx_0 nos resulta luégo que

$$(92)\begin{cases}\dfrac{l}{g_0}\cos(L-\varphi_0)=-\dfrac{\rho}{\rho'}\cos(\psi-\psi')\pm\dfrac{\delta}{\rho'}\cos\gamma, & \text{y}\\[2ex] \dfrac{l}{g_0}\operatorname{sen}(L-\varphi_0)=-\dfrac{\rho}{\rho'}\operatorname{sen}(\psi-\psi')\pm\dfrac{\delta}{\rho'}\operatorname{sen}\gamma\end{cases}$$

Entre las cantidades g, g_0 y l, y φ, φ_0 y L, existen estas relaciones necesarias y evidentes:

$$g\cos\varphi=g_0\cos\varphi_0+l\cos L, \quad \text{y}$$

$$g\operatorname{sen}\varphi=g_0\operatorname{sen}\varphi_0+l\operatorname{sen}L.$$

De las cuales, con suma sencillez se desprenden estas otras:

$$(93)\begin{cases}\dfrac{g}{g_0}\cos(\varphi-\varphi_0)=1+\dfrac{l}{g_0}\cos(L-\varphi_0), & \text{y}\\[2ex] \dfrac{g}{g_0}\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_0)=\dfrac{l}{g_0}\operatorname{sen}(L-\varphi_0).\end{cases}$$

Y, finalmente, las que siguen por la combinacion de los sistemas (92) y (93) uno con otro:

$$(94)\begin{cases}\dfrac{g}{g_0}\cos(\varphi-\varphi_0)=1-\dfrac{\rho}{\rho'}\cos(\psi-\psi')\pm\dfrac{\delta}{\rho'}\cos\gamma, & \text{y}\\[2ex] \dfrac{g}{g_0}\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_0)=-\dfrac{\rho}{\rho'}\operatorname{sen}(\psi-\psi')\pm\dfrac{\delta}{\rho'}\operatorname{sen}\gamma.\end{cases}$$

Expresiones las últimas que pueden simplificarse, con solo advertir que en la primera por $\cos(\varphi-\varphi_0)$ es lícito poner ó sustituir la unidad; y la unidad tambien en la segunda por $\frac{g}{g_0}$. Restableciendo el módulo M, para pasar de los logaritmos neperianos á los vulgares, nos resulta, en efecto, entónces que

$$(95)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{M}\times\Delta\log g_0=-\dfrac{\rho}{\rho'}\cos(\psi-\psi')\pm\dfrac{\delta}{\rho'}\cos\gamma,\qquad \text{y}\\[2ex] \operatorname{sen}1''\times\Delta\varphi_0=-\dfrac{\rho}{\rho'}\operatorname{sen}(\psi-\psi')\pm\dfrac{\delta}{\rho'}\operatorname{sen}\gamma.\end{array}\right.$$

Con auxilio de estas últimas fórmulas, despues de conocer el valor de x, aproximado á la verdad, $x_0=-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}=-g_0(\cos\varphi_0+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi_0)$, fácil será calcular las correcciones de g_0 y de φ_0, y deducir así otro más digno de confianza todavía, ó los dos valores de x, casi iguales, que ahora se buscan. En los segundos miembros de aquellas fórmulas las cantidades que figuran son funciones explícitas de los coeficientes de la ecuacion propuesta y del valor x_0, aproximado del de x; y, por lo tanto, pueden considerarse como determinadas ó conocidas todas. Nada, pues, se opone al cálculo de las correcciones mencionadas.

§. 33.

Aplicacion de la doctrina expuesta en los párrafos anteriores á la resolucion de un ejemplo.

Conforme hemos practicado en otros casos análogos, presentemos tambien ahora un ejemplo muy sencillo, al cual sea aplicable la doctrina en este capítulo comprendida. Otro, algo más complicado é interesante, se resolverá y discutirá al final del capítulo siguiente, y último de la Memoria. Y bastarán al lector este par de ejemplos para saber á qué atenerse en cuantos otros casos análogos pudieren ocurrirle ó presentársele en la práctica.

Sea la ecuacion

$$(2^{\circ})\qquad x^4+312\,x^3+23337\,x^2-14874\,x+2360=0.$$

Reemplazando los coeficientes por sus logaritmos, y pro-

cediendo en la aplicacion de la regla del §. 3, como tantas otras veces se ha explicado y procedido, hállanse los resultados adjuntos:

$$(2^0)\quad x^4 + 2.4941546\,x^3 + 4.3680450\,x^2 - 4.1724278\,x + 3.3729120 = 0$$

$$(2^1)\quad x^4 + 4.7047509\,x^3 + 8.7434327\,x^2 + 8.0456566\,x + 6.7458240 = 0$$

$$(2^2)\quad x^4 + 9.1642474\,x^3 + 17.4868507\,x^2 + 15.7902797\,x + 13.4916480 = 0$$

$$(2^3)\quad x^4 + 18.1809775\,x^3 + 34.9737014\,x^2 + 31.2795301\,x + 26.9832960 = 0$$

$$(2^4)\quad x^4 + 36.3248902\,x^3 + 69.9474028\,x^2 + 62.2580331\,x + 53.9665920 = 0$$

$$(2^5)\quad x^4 + 72.6480534\,x^3 + 139.8948056\,x^2 + 124.2150484\,x + 107.9331840 = 0$$

$$(2^6)\quad x^4 + 145.2961033\,x^3 + 279.7896112\,x^2 + 248.1291140\,x + 215.8663680 = 0$$

Que las cuatro raices de la ecuacion (2^0) son *reales* se infiere de la constancia de los signos, positivos en todos los términos de todas las transformadas de aquella ecuacion. El producto, $a\,b$, de las dos raices mayores, se halla ya separado del $c\,d$, de las dos menores, ó, en absoluto, más pequeñas, en la transformada (2^2); pero la raiz a no se desprende de la b hasta la (2^6); y las c y d permanecen confundidas hasta una transformada de órden muy elevado, y que sería por extremo fastidioso, si no insensato de todo punto, empeñarse en deducir. Obtenida, pues, la (2^2), fácil sería descomponer la (2^0) ó la (2^1) en dos trinomios de segundo grado, por el procedimiento expuesto y practicado en el Capítulo IV, y hallar, en consecuencia, los valores aproximados de las cuatro raices; mas, como ahora se trata de llegar al mismo fin por muy dis-

tinto camino, prescindiremos por completo de aquel antiguo procedimiento, ya conocido del lector.

De la ecuacion (2^6) se deduce por de pronto que

$$\left.\begin{array}{r} 2^6.\log a = 145.2961033 \\ \log a = \quad 2.2702516 \\ a = 186.3166..... \end{array}\right\} \text{y} \quad \left.\begin{array}{r} 2^6.\log ab = 279.7896112 \\ \log b = \quad 2.1014611 \\ b = 126.3168..... \end{array}\right\}$$

Y si las raices c y d, que se resisten á la separacion, fuesen en realidad *iguales*, de la misma transformada (2^6), aproximadamente se concluiría tambien, por lo dicho en el §. 27, que

$$\log.2\,(a\,b\,c)^{2^6} = 248.1291140, \text{ ó } \log a\,b\,c = 3.8723138; \quad \text{y}$$

$$\log.\ (abc^2)^{2^6} = 215.8663680, \text{ ó } \log abc^2 = 3.3729120.$$

Y restando del logaritmo de abc el de ab, y del de abc^2 el de abc, se hallarán estos dos valores, casi iguales, del de c, y luégo de c:

$$\left.\begin{array}{r} \log c = \bar{1}.5006011 \\ \bar{1}.5005982 \end{array}\right\} \text{y} \quad \left.\begin{array}{r} c = d = 0.316666 \\ 0.316664 \end{array}\right\}.$$

Las dos raices c y d parece, pues, que se confunden, ó que, limitadas á la sexta cifra decimal, tienen por valor aproximado comun éste:

$$x_0 = c = d = 0.316665.$$

Pero ¿son absolutamente iguales?

Para decidirlo hay que formar la ecuacion (83) del §. 31, y tratar de deducir los valores de Δx_0. En la ecuacion (2^0), en su *derivada* primera, y en la segunda, dividida por 2, habrá, pues, que sustituir por x_0 el valor comun aproximado de c y d; y así se obtendrán los coeficientes de aquella ecua-

cion (83), aplicable al caso de que ahora se trata, y cuya resolucion, despues de formada, no presentará la menor dificultad.

La ecuacion á que nos referimos es la siguiente:

$$23634.000100333350\,\Delta x_0^2 + 0.008238515573\,\Delta x_0 - 0.0000000022204 = 0.$$

Y los valores de Δx_0, que de ella se desprenden, serán éstos:

$$\Delta x_0 = +0.000000178307; \quad \text{y}$$
$$-0.000000526895.$$

Por lo tanto, las raices c y d, *positivas* ambas, en vez de confundirse por completo, valdrán respectivamente lo que sigue; y su separacion, dificilísima, queda con esto verificada:

$$c = +0.316665178307; \quad \text{y}$$
$$d = +0.316664473105.$$

Los valores de las a y b, *negativas*, en la acepcion comun algebráica, pueden corregirse por la regla de Newton; y, limitados á la 10.ª cifra decimal, son éstos:

$$a = -186.3166651783; \quad \text{y}$$
$$b = -126.3166644731.$$

Las cuatro raices de la ecuacion propuesta son en realidad las siguientes:

$$-63 \pm \sqrt{4009}; \quad \text{y} \quad -93 \pm \sqrt{8708}.$$

Pero el procedimiento de resolucion, en éste y los precedentes capítulos explicado, sólo puede suministrarnos valores más ó menos aproximados, en forma de fraccion decimal indefinida, de aquellas cuatro raices.

CAPITULO VII.

Aplicacion de las teorías expuestas en los capítulos precedentes á la resolucion de varios ejemplos.

§. 34.

Necesidad ó conveniencia de este capítulo, complementario de los precedentes.

Aunque en el curso de esta Memoria se hayan intercalado algunos ejemplos bastante sencillos, con el doble objeto de ilustrar la teoría y demostrar la conveniencia y eficacia del nuevo método de resolucion de las ecuaciones numéricas, por vía de recapitulacion, y para que pueda prácticamente parangonarse la importancia y generalidad de este procedimiento con las de cualquiera otro de los ya conocidos y vulgares, agregaremos á los resueltos y discutidos en las páginas anteriores otros varios, de mayor complicacion y trascendencia.

§. 35.

Resolucion de una ecuacion de séptimo *grado, con siete raices reales, comprendidas entre* cero *y la* unidad.

Como primero de todos, propongámonos resolver la siguiente ecuacion, en una de sus célebres obras analizada y resuelta tambien por el profundo matemático C. F. Gauss:

$$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 +$$

$$\frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0.$$

Reemplazando en ella los coeficientes por sus logaritmos, nos resultará esta otra:

$$x^7 - 0.5440680\,x^6 + 0.6853971\,x^5 -$$

$$0.5270347\,x^4 + 0.0877020\,x^3 - \overline{1}.3429745\,x^2 +$$

$$\overline{2}.2126407\,x - \overline{4}.4644527 = 0.$$

El uso de las *características* negativas, tan embarazoso y poco conveniente en el cálculo, se evitará transformando la ecuacion propuesta en otra, cuyas raices sean las de la primitiva, multiplicadas por un factor comun, k. Y cuando este factor pueda escogitarse de manera que el último término de la ecuacion transformada resulte igual á la unidad, tampoco deberá prescindirse de la simplificacion en tan sencilla propiedad basada. En el ejemplo de que ahora se trata, ambos resultados apetecidos se obtienen adoptando para multiplicador comun, k, el número determinado por la relacion siguiente: $k^7 = 3432$; ó $\log k = 0{,}5050782$.

Agregando este logaritmo al segundo coeficiente de la ecuacion anterior, y su duplo, triplo, etc., etc., respectivamente, á los demas sucesivos, la transformacion quedará verificada, y obtendremos este nuevo resultado, ó ecuacion, que deberemos considerar como verdadero punto de partida:

$$(2^o)\quad x^7 - 1.0491462\,x^6 + 1.6955535\,x^5 -$$

$$2.0422693\,x^4 + 2.1080148\,x^3 - 1.8683655\,x^2 +$$

$$1.2431099\,x - 0.0000000 = 0.$$

En el cálculo de las primeras transformadas de esta ecuacion, por la regla del (§. 3), conviene emplear logaritmos de *siete* cifras decimales; porque, si solo de *cinco*, desde un principio, los empleásemos, en el del tercer coeficiente de la (2'), nos resultaría que

$$\log \alpha_2^2 \quad = + 3.39111;$$

$$-\log 2\,\alpha_1\,\alpha_3 = - 3.39245; \text{ y}$$

$$\log 2\,\alpha_4 \quad = + 2.40904.$$

Pues bien: cuando, con auxilio de las tablas de Gauss, conocida la diferencia de dos logaritmos, tratemos de calcular el logaritmo de la diferencia de los números á que corresponden, conforme en el (§. 19) se explicó, si la primera diferencia es, como en el caso actual acontece, de 0.00134, bastará una incertidumbre ó error de una simple unidad de quinto órden, para que el logaritmo buscado adolezca de otro error ó incertidumbre de todo punto inadmisible, hasta de 330 unidades de la misma especie. Y no solo por este motivo, sino, en general, para evitar desde un principio la acumulacion de errores, transcendentes á los resultados finales, conviene calcular las primeras transformadas de la ecuacion propuesta con *siete* cifras decimales; sin perjuicio, para simplificar y abreviar las operaciones numéricas, cuando ya un extremado rigor no se considere preciso, de trabajar luégo con logaritmos de solas *cinco*. Hasta la presuncion muy racional de que sean erróneas las dos últimas cifras decimales, tras de unas cuantas combinaciones aritméticas con números meramente aproximados á la verdad, autoriza y aconseja semejante manera de proceder. De la ecuacion (2°) se desprenderán, pues, por la regla del (§. 3), y en consecuencia de todo lo dicho, las transformadas que siguen:

$$(2^1)\quad x^7+1.4180048x^6+2.3959870x^5+$$
$$3.0189949x^4+3.2738401x^3+3.0739348x^2+$$
$$2.2004297x+0.0000000=0.$$

$$(2^2)\quad x^7+2.2735725x^6+4.0410890x^5+$$
$$5.3386202x^4+6.0534451x^3+5.9093643x^2+$$
$$4.3578860x+0.0000000=0.$$

$$(2^3)\quad x^7+4.12268x^6+7.61495]x^5+$$
$$10.36176x^4+11.96640x^3+11.78333x^2+$$
$$8.71441x+0.00000=0.$$

$$(2^4)\quad x^7+7.97094x^6+15.03773x^5+$$
$$20.65592x^4+23.91840x^3+23.56553x^2+$$
$$17.42882x+0.00000=0.$$

$$(2^5)\quad x^7+15.81746x^6+30.04231x^5+$$
$$41.30800x^4+47.83679x^3+47.13106x^2+$$
$$34.85764x+0.00000=0.$$

$$(2^6)\quad x^7+31.61214x^6+60.08366x^5+$$
$$82.61598x^4+95.67358x^3+94.26212x^2+$$
$$69.71528x+0.00000=0.$$

$$(2^7)\quad x^7+63.22365x^6+120.16732x^5+$$
$$165.23196x^4+191.34716x^3+188.52424x^2+$$
$$139.43056x+0.00000=0.$$

Como ya en otro lugar advertimos, el cálculo de estas diversas ecuaciones transformadas es tanto más breve y sencillo cuanto más nos alejamos de la primitiva, ó cuanto mayores

van siendo los exponentes de las potencias á que las raices de esta misma ecuacion resultan elevadas: para penetrarse de lo cual basta reparar que los coeficientes de los cuatro últimos términos de la (2^5) se obtienen por simple *duplicacion* de los correspondientes en la anterior; los cinco últimos de la (2^6) por duplicacion de los mismos cinco de la (2^5); y los seis de la (2^7) duplicando tambien los seis últimos de la precedente. Sólo el coeficiente de x^6 se deduce en la (2^7) por un procedimiento algo, muy poco, más complicado, de los coeficientes de la transformada anterior. Y en la (2^8) ni siquiera esta simple excepcion se advertiria. El trabajo de transformacion preliminar, necesario para determinar las siete raices de la ecuacion (2^0), con el grado de aproximacion asequible por medio de las tablas logarítmicas de cinco cifras decimales, concluye, pues, en la (2^7). Y como ésta y las demas transformadas que la preceden no presentan un solo cambio de signo, ó tienen positivos todos sus términos, resulta que aquellas siete raices son *reales* todas. Para determinar sus logaritmos, basta restar de los coeficientes tercero, cuarto, ..., de la (2^7), los segundo, tercero, ...; y dividir el segundo, y las diferencias resultantes, por el exponente, 128, de la potencia máxima á que han sido elevadas aquellas raices. De los logaritmos de las correspondientes á la ecuacion simbólica, representada por (2^0), se deducirán luégo los de la realmente propuesta, restando de todos el del número k, igual á 0.5050782. En el adjunto cuadro se hallan consignados los resultados diversos, obtenidos procediendo de este modo:

$\log (ak)^{128} = 63.22365$	$\log ak = 0.493935$	$\log a = \bar{1}.98886$
$\log (bk)^{128} = 56.94367$	$\log bk = 0.444872$	$\log b = \bar{1}.93979$
$\log (ck)^{128} = 45.06464$	$\log ck = 0.352067$	$\log c = \bar{1}.84699$
$\log (dk)^{128} = 26.11520$	$\log dk = 0.204025$	$\log d = \bar{1}.69895$
$\log (ek)^{128} = \bar{3}.17708$	$\log ek = \bar{1}.977946$	$\log e = \bar{1}.47287$
$\log (fk)^{128} = \overline{50}.90632$	$\log fk = \bar{1}.616456$	$\log f = \bar{1}.11138$
$\log (gk)^{128} = \overline{140}.56944$	$\log gk = \bar{2}.910699$	$\log g = \bar{2}.40562$

Si para determinar los *signos* de estas raices (*negativas* en la acepcion de la palabra *raiz*, adoptada en esta MEMORIA, y *positivas* en el sentido vulgar del Algebra), ó con objeto de calcular sus correcciones por la regla de Newton, sustituyésemos sus valores en la ecuacion propuesta, sorprenderíanos el grado de aproximacion ya obtenido. Y eso que el ejemplo no tiene nada de sencillo; pues una ecuacion de séptimo grado, con siete raices reales, comprendidas todas entre 0 y 1, no es fácil de resolver por ningun procedimiento. Ni el artificio de multiplicar estas raices por el número k, abrevia tampoco en ninguno la multitud de operaciones, indispensables para determinarlas con la aproximacion desde luego obtenida por el nuevo método y reiterada, pero muy sencilla, aplicacion de la regla fundamental del (§. 3).

Efectuemos aquella sustitucion en un solo caso,—en el más desfavorable, por cierto,—y veamos lo que entónces resulta. Operando con logaritmos de *siete* cifras decimales, y suponiendo que $x_0 = b_0$ y $\log b_0 = \overline{1}.9397900$, obtendremos, por de pronto, los resultados adjuntos:

x_0^7	$= +0.3789047$	$7x_0^7$	$= +2.6523329$
$\alpha_1 x_0^6$	$= -1.5233790$	$6\alpha_1 x_0^6$	$= -9.1402740$
$\alpha_2 x_0^5$	$= +2.4229648$	$5\alpha_2 x_0^5$	$= +12.1148240$
$\alpha_3 x_0^4$	$= -1.9328347$	$4\alpha_3 x_0^4$	$= -7.7313388$
$\alpha_4 x_0^3$	$= +0.8073689$	$3\alpha_4 x_0^3$	$= +2.4221067$
$\alpha_5 x_0^2$	$= -0.1669377$	$2\alpha_5 x_0^2$	$= -0.3338754$
$\alpha_6 x_0$	$= +0.0142047$	$1\alpha_6 x_0$	$= +0.0142047$
α_7	$= -0.0002914$	$0\alpha_7$	$= 0.0000000$
$[x_0^n]$	$= +0.0000003$	$[n x_0^n]$	$= -0.0020199$

Y por la fórmula (12) del (§. 8) concluiremos en seguida que

$$\Delta \log x_0 = -\frac{[x_0^n]}{[n x_0^n]} \times M = \frac{3}{20199} \times 0.43429 \ldots\ldots = 0.000065$$

Pero como este resultado depende principalmente de la

única cifra, 3, del numerador, y en esta cifra, procedente de multitud de operaciones con números meramente aproximados á la verdad, no puede abrigarse plena confianza, acaso la correccion de la raiz ensayada, b_0, tenga algo de ilusoria. Algo tiene, en efecto; áun cuando el valor corregido de log x_0 ó log b_0 se aproxime realmente á la verdad un poco más que aquél de donde partimos. Para obtener, sin embargo, la verdadera correccion que se busca, sería menester operar, ó con logaritmos de *diez* cifras, ó directamente, prescindiendo del auxilio de esta especie de tablas. Procediendo así, fácil, aunque nada breve, sería determinar, partiendo de los valores ya conocidos de a_0, b_0, c_0, ... los de a, b, c, ... con mucho mayor número de cifras decimales. Hasta la 16.ª cifra prolongó Gauss la aproximacion; y, comparando los resultados finales por él obtenidos, con los poco há determinados, conclúyese que los cuatro primeros logaritmos de a_0, b_0, c_0 y d_0, adolecen, por defecto, de los errores respectivos de 5, 11, 8 y 2 *unidades* del quinto órden decimal únicamente; y de errores inferiores á una simple unidad del mismo órden los de e_0, f_0 y g_0. Y si estas tan mínimas discrepancias de la verdad, obtenidas en el primer ensayo de la determinacion *simultánea* de las siete raices, son apreciables todavía, atribúyase á la contrariedad eventual, ya poco ántes tambien indicada: á la pequeña diferencia de los logaritmos de α_2^2 y $2\,\alpha_1\,\alpha_3$, correspondientes á la ecuacion (2°), que influye muy desfavorablemente en la determinacion del logaritmo de la diferencia de ambos números, ó del tercer coeficiente de la transformada (2').

§. 36.

Resolucion de otra ecuacion, tambien de SÉPTIMO *grado, con* tres *raices reales y* cuatro *imaginarias.*

Como segundo ejemplo tomemos la ecuacion de grado superior, propuesta por Fourier en la página 111 de su *Tratado de la Resolucion de las Ecuaciones Numéricas:*

$$(2^0) \qquad x^7 - 2\,x^5 - 3\,x^3 + 4\,x^2 - 5\,x + 6 = 0.$$

Sus dos primeras transformadas, directamente obtenidas por la regla del (§. 3) son éstas:

$$(2^1)\quad x^7+4x^6-2x^5-2x^4+29x^3-14x^2-23x+36=0;\quad \text{y}$$

$$(2^2)\quad x^7+20x^6+78x^5+54x^4+589x^3+1386x^2+1537x+1286=0.$$

Reemplazando los coeficientes de la última ecuacion por sus logaritmos, y continuando la misma serie de transformaciones, obtiénense sucesivamente estos otros resultados:

$$(2^2)\quad x^7+1.30103\,x^6+1.89209\,x^5+1.73239\,x^4+2.77012\,x^3+3.14176\,x^2+3.18667\,x+3.11261=0.$$

$$(2^3)\quad x^7+2.38739\,x^6+3.70774\,x^5-4.56350\,x^4+5.58565\,x^3+5.39859\,x^2-6.08996\,x+6.22522=0.$$

$$(2^4)\quad x^7+4.69313\,x^6+7.64995\,x^5-9.39198\,x^4+11.18557\,x^3+11.94810\,x^2+11.82750\,x+12.45044=0.$$

$$(2^5)\quad x^7+9.37002\,x^6+15.34998\,x^5-18.87658\,x^4+22.44623\,x^3+23.75387\,x^2-24.65849\,x+24.90088=0.$$

$$(2^6)\quad x^7+18.73971\,x^6+30.70300\,x^5-37.83535\,x^4+44.89718\,x^3+47.76037\,x^2+49.06889\,x+49.80176=0.$$

$$(2^7)\quad x^7+37.47942\,x^6+61.40601\,x^5-75.51594\,x^4+89.79441\,x^3+95.49582\,x^2+97.80854\,x+99.60352=0.$$

$$(2^8)\quad x^7+74.95884\,x^6+122.81202\,x^5-151.32153\,x^4+179.58882\,x^3+190.99129\,x^2+195.21132\,x+199.20704=0.$$

El cálculo de transformacion concluye en este punto; pues, para deducir de la ecuacion (2^8) la (2^9), bastaría *duplicar* los coeficientes de la primera, prescindiendo de los de x^4 y x, completamente indeterminados, ó variables en magnitud y signo: indeterminacion de coeficientes que nos revela la existencia en la ecuacion propuesta de *dos pares* de raices imaginarias conjugadas. Los logaritmos de las *tres* raices reales y de los *dos* módulos de las cuatro imaginarias se obtendrán restando unos de otros los coeficientes logarítmicos determinados de la transformada final (2^8), y dividiendo las diferencias por el exponente comun, 256, de las potencias á que las raices han sido elevadas, conforme á continuacion se indica:

Coeficientes comparados de

x^7 y x^6	$\log a^{256} = 74.95884$	$\log a = 0.292808$
x^6 y x^5	$\log b^{256} = 47.85318$	$\log b = 0.186927$
x^5 y x^4	Resultado indeterminado.	
x^3 y x^3	$\log g^{512} = 56.77680$	$\log g^2 = 0.221788$
x^2 y x^2	$\log c^{256} = 11.40247$	$\log c = 0.044541$
x^2 y x^1	Resultado indeterminado.	
x^2 y x^0	$\log g_1^{512} = 8.21575$	$\log g_1^2 = 0.032093$

Los tres valores de las raices reales, a, b y c, pueden corregirse por sustitucion de los números encontrados en la ecuacion propuesta y regla de aproximacion de Newton. Limitémonos á consignar los resultados que se obtendrían operando con el primero.

Suponiendo que $x_0 = a_0$, y $\log a_0 = 0.292808$, se deduce sin dificultad que

$-x_0^7 = -112.112997$	$-7\,x_0^7 = -784.790979$
$-\alpha_2\,x_0^5 = +\ 58.219704$	$-5\,\alpha^2\,x_0^5 = +\ 291.098520$
$-\alpha_4\,x_0^3 = +\ 22.674894$	$-3\,\alpha_4\,x_0^3 = +\ 68.024682$
$+\alpha_5\,x_0^2 = +\ 15.405508$	$-2\,\alpha_5\,x_0^2 = +\ 30.811016$
$-\alpha_6\,x_0 = +\ 9.812460$	$-1\,\alpha_6\,x_0 = +\ 9.812460$
$+\alpha_7 = +\ 6.000000$	$-0.\alpha_7 = +\ 0.000000$
$[(-x_0)^n] = -\ 0.000431$	$[n(-x_0)^n] = -385.044301$

De donde, por la fórmula (12), se concluye que

$$\Delta \log x_0 = -0.0000005;$$

y, por lo tanto,

$$\log x = 0.2928075; \quad \text{y} \quad x = -a = -1.9624901$$

Y, de análogo modo, los valores de x, correspondientes á las raices b y c, resultarían respectivamente iguales á

$$1.5378905 \quad \text{y} \quad 1.1080166$$

Los *signos* de las tres raices reales se determinan sin dificultad por la sustitucion de los valores encontrados en la ecuacion propuesta. Si, por ejemplo, se trata del valor a_0, y éste se pone en aquella ecuacion en lugar de x, con el signo positivo, en vez de resultarnos para $[x_0^n]$ un valor muy pequeño, como debe siempre suceder cuando por x sustituyamos un valor suyo, muy aproximado á la verdad, nos resultará cualquier despropósito. Que $x_0 = -1.96249$ representa aproximadamente uno de los valores buscados nos lo acredita la expresion $[x_0^n] = -0.000431$; y que la suposicion contraria es absurda lo prueba el resultado, $[x_0^n] = 42.812$ ....., que, admitiéndola como cierta, se obtendria. Basta én todos los casos un poco de atencion, sín incremento apénas de trabajo, para saber sobre este punto á qué atenerse.

Aunque la ecuacion propuesta sea de séptimo grado, como tiene *tres* raices reales, los dos trinomios de segundo, que comprenden las *cuatro* imaginarias, pueden determinarse por el procedimiento del (§. 13), como si se tratara de una ecuacion de cuarto grado; ó resolviendo estas dos ecuaciones muy sencillas de primero:

$$a + b + c + f + f_1 = \alpha_1 = 0$$

$$g^2 g_1^2 (ab + ac + bc) + abcg^2 . f_1 + abcg_1^2 . f = \alpha_6 = -5:$$

en las cuales, por a, b y c, g^2 y g_1^2, deberán sustituirse los valores numéricos poco ántes encontrados. Las dos ecuaciones se convierten entónces en estas otras:

$$f + f_1 = +0.68341; \text{ y}$$

$$3.60055\, f + 5.57264\, f_1 = +1.25927.$$

De las cuales resulta que

$$f = +1.29258, \quad \text{y} \quad f_1 = -0.60917.$$

Para corregir ahora los primeros valores de g y f, y de g_1 y f_1, deberemos emplear las fórmulas (21) del (§. 14), y el procedimiento de cálculo en el mismo párrafo explicado. Limitémonos á la deduccion de las correcciones de g_0 y f_0, valores aproximados de g y f.

Por de pronto se infiere de estos valores que

$$\log g_0 = 0.11089, \quad \text{y} \quad \varphi_0 = 59^\circ\, 57'\, 20''.$$

Y con estos datos fácil es calcular los dos adjuntos cuadros de relaciones numéricas:

$-g_0^7 \cos 7\varphi_0$	$=-3.0148035$	$-7 g_0^7 \cos 7\varphi_0$	$=-21.1036245$
$-\alpha_2 g_0^5 \cos 5\varphi_0$	$=+3.5605688$	$-5\alpha_2 g_0^5 \cos 5\varphi_0$	$=+17.8028440$
$-\alpha_4 g_0^3 \cos 3\varphi_0$	$=-6.4534218$	$-3\alpha_4 g_0^3 \cos 3\varphi_0$	$=-19.3602654$
$+\alpha_5 g_0^2 \cos 2\varphi_0$	$=-3.3238460$	$+2\alpha_5 g_0^2 \cos 2\varphi_0$	$=-6.6476920$
$-\alpha_6 g_0 \cos \varphi_0$	$=-3.2315655$	$-1\alpha_6 g_0 \cos \varphi_0$	$=+3.2315655$
$+\alpha_7$	$=-6.0000000$	$+0.\alpha_7$	$=+0.0000000$
$[(-g_0)^n \cos n\varphi_0]$	$=+0.0000630$	$[n(-g_0)^n \cos n\varphi_0]$	$=-26.0771724$

$-g_0^7 \operatorname{sen} 7\varphi_0$	$=-5.1569226$	$-7 g_0^7 \operatorname{sen} 7\varphi_0$	$=-36.0984582$
$-\alpha_2 g_0^5 \operatorname{sen} 5\varphi_0$	$=-6.2226992$	$-5\alpha_2 g_0^5 \operatorname{sen} 5\varphi_0$	$=-31.1134960$
$-\alpha_4 g_0^3 \operatorname{sen} 3\varphi_0$	$=-0.0150177$	$-3\alpha_4 g_0^3 \operatorname{sen} 3\varphi_0$	$=+0.0450531$
$+\alpha_5 g_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi_0$	$=+5.7777520$	$+2\alpha_5 g_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi_0$	$=+11.5555040$
$-\alpha_6 g_0 \operatorname{sen} \varphi_0$	$=+5.5872230$	$-\alpha_6 g_0 \operatorname{sen} \varphi_0$	$=+5.5872230$
$[(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0]$	$=+0.0003709$	$[n(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0]$	$=-50.0241741$

Recordando ahora que

$$[(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = P\cos Q \quad \text{y} \quad [(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0] = P \operatorname{sen} Q; \text{ y}$$
$$[n(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = \rho\cos\psi \quad \text{y} \quad [n(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0] = \rho \operatorname{sen}\psi,$$

conclúyese, en consecuencia de cuanto precede, que

$$\log P = \bar{4}.575433 \quad \text{y} \quad \log\rho = 1.751380; \quad \text{y}$$
$$Q = 80^\circ 21'36''.7 \quad \text{y} \quad \psi = 242^\circ 28'2''.5$$

Y de aquí, por las fórmulas (21), ya citadas, que:

$$\Delta \log g_0 = +0.0000027{,}56 \quad \text{y} \quad \Delta\varphi_0 = +0''.42; \quad \text{ó}$$
$$\log g = 0.1108927{,}56 \quad \text{y} \quad \varphi = 59^\circ 57'20''.42$$

En suma: despues de verificadas las correcciones de las siete cantidades a, b y c, g^2 y f, y g_1^2 y f_1, la ecuacion propuesta se resolverá en el siguiente producto de cinco factores, *dos* de segundo grado y *tres* de primero:

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + \ldots\ldots = (x^2 - 0.6092132\,x + 1.0766801) \times$$
$$(x^2 + 1.2926302\,x + 1.6664238) \times$$
$$(x + 1.9624901) \times (x - 1.5378905) \times (x - 1.1080166) = 0.$$

Operando con logaritmos de *cinco* cifras decimales, con dificultad se obtendrá nunca mayor grado de aproximacion á la verdad que en el caso presente, por la simple aplicacion del método general á la determinacion de las raices.

§. 37.

Resolucion de otra ecuacion, del grado séptimo tambien, con una *sola raiz real y* seis *imaginarias.*

Como tercer ejemplo, propongámonos resolver la siguiente ecuacion, con *seis*, en vez de cuatro *raices* imaginarias:

$$(2^0) \quad x^7 + 3x^4 + 6 = 0.$$

Las primeras transformadas, directa y exactamente obtenidas, son éstas:

$$(2^1)\quad x^7+9x^4+36x^2+36=0$$

$$(2^2)\quad x^7+81x^4-648x^3+1944x^2-2592x+1296=0$$

$$(2^3)\quad x^7-1296x^5+11745x^4+104976x^3+629856x^2+1679616x+1679616=0.$$

Y las consecutivas, aproximadamente calculadas con auxilio de las tablas de logaritmos, estas otras, en las cuales, como de costumbre, los logaritmos reemplazan tambien á los coeficientes verdaderos:

$$(2^4)\quad x^7+3.41364x^6+6.27636x^5+8.60926x^4-9.91005x^3+10.92186x^2+11.84836x+12.45042=0.$$

$$(2^5)\quad x^7+6.46828x^6+12.16012x^5+17.29346x^4+17.89851x^3+22.31679x^2+22.41671x+24.90084=0.$$

$$(2^6)\quad x^7+12.75961x^6+23.97079x^5+34.58689x^4-39.91125x^3+44.63668x^2-47.51776x+49.80168=0.$$

$$(2^7)\quad x^7+25.49393x^6+47.63345x^5+69.17378x^4+79.51832x^3+89.26074x^2+94.72953x+99.60336=0.$$

$$(2^8)\quad x^7+50.98747x^6+94.96298x^5+138.34756x^4+158.73567x^3+178.52144x^2+189.15081x+199.20672=0.$$

Dentro del límite de aproximacion, compatible con el uso de las tablas logarítmicas de *cinco* cifras decimales, la trans-

formada (2^8) puede considerarse como definitiva. Los coeficientes de x^6, x^4, x^2 y x^0, correspondientes á la (2^9), se obtendrían, en efecto, por simple duplicacion de los mismos coeficientes de la anterior; y los de x^5, x^3 y x^1, de signo variable, desde las transformadas (2^2) y (2^0) sólo nos sirven para revelarnos la existencia en la ecuacion propuesta, (2^0), de tres pares distintos de raices imaginarias conjugadas. Designando por a la única raiz real de aquella ecuacion, y por g_0^2, g_1^2 y g_2^2 los cuadrados de los tres módulos, por el procedimiento, ya muchas veces aplicado, de sustraccion unos de otros de los coeficientes de la (2^3), conclúyese sin dificultad que

$$\log a^{256} = 50.98747 \qquad \log a = 0.199170$$

$$\log g_0^{512} = 87.36009 \qquad \log g^2 = 0.341250$$

$$\log g_1^{512} = 40.17388 \qquad \log g_1^2 = 0.156929$$

$$\log g_2^{512} = 20.68528 \qquad \log g_2^2 = 0.080802$$

Para determinar ahora por el procedimiento y fórmulas de los §§. (17) y (18) los tres valores de f, que á los tres de g corresponden, consideraremos la ecuacion propuesta como de octavo grado, y emplearemos las fórmulas (a'') y (b''), en el segundo de aquellos párrafos insertas. Las cantidades auxiliares, que en la composicion de estas fórmulas figuran, se reducen en el caso presente á las que siguen:

$$\alpha_1=0;\ \alpha_2=0;\ \alpha_3=3;\ \alpha_4=0;\ \alpha_5=0;\ \alpha_6=0;\ \alpha_7=6;\ \text{y}\ \alpha_8=0.$$

$$\beta=1;\ \beta_1=6\,g^{-6};\ \beta_2=0;\ \beta_3=3;\ \text{y}\ \beta_4=0.$$

$$\gamma=1;\ \gamma_1=-6\,g^{-6};\ \gamma_2=0;\ \text{y}\ \gamma_3=3.$$

Y las fórmulas (a'') y (b'') á estas otras, muy sencillas por la circunstancia de ser $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=\alpha_8=0$:

$$f^4-6\,g^{-6}f^3-4\,g^2f^2+(18\,g^{-4}-3)f+2\,g^4=0; \qquad \text{y}$$

$$f^3+6\,g^{-6}f^2-2\,g^2f-(6\,g^{-4}+3)=0$$

Por g deberemos sustituir, *sucesivamente*, en estas dos ecuaciones sus valores particulares, ya encontrados, y designados por g_0, g_1 y g_2; y así podremos luégo concluir, sucesivamente tambien, los de f_0, f_1 y f_2 que les corresponden. Concretándonos, por de pronto, á la primera sustitucion, y reemplazando los coeficientes de f por sus logaritmos, con la precaucion indispensable de no alterar los signos de los coeficientes numéricos á que se refieren, de las dos últimas ecuaciones se desprenden estas otras:

$$f_0^4 - \bar{1}.75440\, f_0^3 - 0.94331\, f_0^2 + \bar{1}.86872\, f_0 + 0.98353 = 0; \text{ y}$$

$$f_0^3 + \bar{1}.75440\, f_0^2 - 0.64228\, f_0 - 0.62802 = 0.$$

Y de aquí, con auxilio de las *tablas de Gauss*,—ó con las vulgares de logaritmos,— por el procedimiento minuciosamente explicado en el (§. 19), se concluirá finalmente que

$$\log f_0 + 0.05419 = 0.$$

De la misma manera podrían calcularse los otros dos valores de f,—f_1 y f_2,— dependientes de los de g_1^2 y g_2^2; pero en el caso actual, y por la circunstancia particular, ya indicada, de ser muy sencillas las dos ecuaciones á que simultáneamente deben satisfacer aquellos valores, el cálculo admite muy notable simplificacion. A las dos ecuaciones mencionadas aplíquese desde luégo, ó sin prévia sustitucion de la g, por g_0, g_1 ó g_2, el procedimiento del *m. c. d.*, hasta llegar á un resíduo de primer grado con relacion á f; é, igualando á *cero* este resíduo, obtendremos la siguiente nueva ecuacion, condicional de que las dos precedentes poseen, en efecto, una raiz comun, correspondiente á cada valor de g, que en ellas se sustituya:

$$f + \frac{3\, g^{12}}{g^{14} + 18\, g^4 - 36} = 0.$$

Y de esta única y muy sencilla ecuacion es de donde se deducirá, por último, que á los valores de log g^2,

$$\log g_0^2=0.34125;\ \log g_1^2=0.15693;\ \text{y}\ \log g_2^2=0.08080,$$

corresponden estos de f:

$$\log f_0=0.05419_n;\ \log f_1=0.28435_n;\ \text{y}\ \log f_2=0.16895.$$

Ó, á los de g^2, que de aquellos logaritmos se deducen,

$$g_0^2=2.19405;\ g_1^2=1.43527;\ \text{y}\ g_2^2=1.20447,$$

estos de f:

$$f_0=-1\ 13289;\ f_1=-1.92464;\ \text{y}\ f_2=+1.47553.$$

Y ampliando luégo la aproximacion hasta la séptima cifra decimal, por las fórmulas adecuadas al objeto, la ecuacion propuesta se resolverá en el siguiente producto de cuatro factores:

$$(x^2-1.1328854x+2.1940798)(x^2-1.9246556x+1.4352554)$$
$$\times(x^2+1.4756817\,x+1.2044862)\,(x+1.5818592)=0.$$

§. 38.

Resolucion de una ecuacion de CUARTO *grado, con dos pares de raices imaginarias* CASI IGUALES.

Y, por último, como ejemplo de la separacion de varias raices imaginarias, *casi iguales*, por el procedimiento del (§. 32), nos servirá la ecuacion siguiente:

$$(2^0)\quad x^4+4.002\,x^3+14.01801\,x^2+20.03802\,x+25.07005=0.$$

De la cual, por la regla del (§. 3), se deducen las transformadas adjuntas:

$$(2^0)\quad x^4 + 0.6022771\,x^3 + 1.1466864\,x^2 + 1.3018548\,x + 1.3991552 = 0.$$

. . . . . .

. . . . . .

$$(2^4)\quad x^4 + 5.82548\,x^3 + 11.62744\,x^2 + 17.01872\,x + 22.38648 = 0.$$

$$(2^5)\quad x^4 - 11.60258\,x^3 + 22.94856\,x^2 - 33.98905\,x + 44.77296 = 0.$$

$$(2^6)\quad x^4 - 22.23747\,x^3 + 45.10256\,x^2 - 67.01072\,x + 89.54592 = 0.$$

$$(2^7)\quad x^4 - 45.34913\,x^3 + 90.29059\,x^2 - 134.89497\,x + 179.09184 = 0.$$

$$(2^8)\quad x^4 + 90.03616\,x^3 + 179.74098\,x^2 + 269.12727\,x + 358.18368 = 0.$$

. . . . . .

. . . . . .

Los cambios de signo, é indeterminacion consiguiente, de los coeficientes de x^3 y de x, nos revelan, como siempre, la existencia de dos pares de raices imaginarias conjugadas en la ecuacion propuesta; pero, áun cuando el signo del coeficiente de x^2 permanezca constantemente *positivo*, en ninguna de las transformadas obtenidas puede considerarse este coeficiente como cuadrado perfecto, ó como procedente su logaritmo de la simple duplicacion del logaritmo que le corresponde en la transformada anterior. Ni en la (2^4), ni en la (2^8), ni áun en las (2^{12}) y (2^{16}), nos resultan, pues, rigurosamente separados los *dos módulos* de aquellas cuatro raices de la ecuacion (2^0).

¿Cómo puede ser esto?—Por la circunstancia excepcional de ser iguales, ó diferir apénas uno de otro, ambos módulos buscados.

Cuando, en efecto, una ecuacion de cuarto grado posea cuatro raices imaginarias, de las formas

$$g_0 (\cos \varphi_0 \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi_0), \quad \text{y} \quad g_1 (\cos \varphi_1 \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi_1),$$

su transformada (2^m) poseerá estas otras cuatro:

$$g_0^m (\cos m\varphi_0 \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} m\varphi_0), \text{ y } g_1^m (\cos m\varphi_1 \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} m\varphi_1);$$

y el coeficiente de x^2 equivaldrá en esta ecuacion á la expresion siguiente:

$$g_0^{2m} \times \left\{ 1 + 2\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^m \cos m(\varphi_0 + \varphi_1) + \right.$$
$$\left. 2\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^m \cos m(\varphi - \varphi_1) + \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^{2m} \right\}.$$

De la cual se infiere que, si g_0 supera un poco á g_1, aquel coeficiente propenderá á confundirse al fin con g_0^{2m}.

Mas, si $g_0 = g_1$, en vez de la expresion anterior, deberíamos considerar esta otra, en la apariencia, más sencilla:

$$2\, g_0^{2m} \times \{ 1 + \cos m(\varphi_0 + \varphi_1) + \cos m(\varphi_0 - \varphi_1) \}.$$

Entonces, pues, y á consecuencia de la variabilidad en magnitud y signo de los dos *cosenos*, el coeficiente en cuestion podrá variar entre $-2\, g_0^{2m}$ y $+6\, g_0^{2m}$; ó fluctuar, más ó ménos, al rededor de $+2\, g_0^{2m}$.

Pero la constancia de signo que en el coeficiente de x^2 se advierte, en todas las transformadas obtenidas, nos induce á sospechar si, además de ser $g_0 = g_1$, se verificará tambien que $f = f_1$, ó $\varphi_0 = \varphi_1$. Porque entonces la forma del coeficiente considerado se reducirá á ésta:

$$4\, g_0^{2m} \times \{ 1 + \cos 2\, m\, \varphi_0 \},$$

positiva necesariamente, y variable entre *cero* y $+8\, g_0^{2m}$; ó fluctuante al rededor del *valor medio* $+4\, g_0^{2m}$.

Si así fuera, restando del coeficiente de x^2, en unas cuantas transformadas sucesivas, el logaritmo del número 4, deberíamos obtener otros logaritmos, aproximados al de g_0^{2m}, cuándo por exceso y cuándo por defecto. Y dividiendo luégo las diferencias encontradas por las potencias de 2^m, á que se refieren ó corresponden, hallaríamos los de g_0^2; y, por lo tanto, los valores numéricos entre los cuales fluctúa el verdadero de g_0^2. En el caso presente, los resultados que así se obtendrían, son los que siguen:

(2^4)	$\log g_0^{2m} = 11.02538$	$\log g_0^2 = 0.68909$	$g_0^2 = 4.888$
(2^5)	22.34650	0.69833	4.992
(2^6)	44.50050	0.69532	4.958
(2^7)	89.68853	0.70069	5.020
(2^8)	179.13892	0.69976	5.009

Los valores de $\log g_1^2$, que á los de g_0^2 corresponden, se obtendrán con suma sencillez, restando del logaritmo, 1.39916, del último término de la ecuacion propuesta (productos de los cuadrados de ambos módulos) los aproximados de g_0^2, ya deducidos. Los nuevos resultados son éstos:

(2^4)	$\log g_1^2 = 0.71007$	$g_1^2 = 5.129$
(2^5)	0.70083	5.022
(2^6)	0.70384	5.056
(2^7)	0.69847	4.994
(2^8)	0.69940	5.005

Aunque muy poco discrepantes unos de otros, si suponemos que $g_0^2 = g_1^2$, para expresion numérica de estos cuadrados deberemos tomar los *promedios* de sus diversos valores, deducidos de las transformadas (2^4) á (2^8). Y como estos cinco promedios son casi absolutamente iguales, é iguales á 5.007, lo que en conclusion, y como por tanteo habremos deducido, puede formularse en los términos siguientes:

$$g_0^2 = g_1^2 = 5.007.$$

Y, áun cuando no convengamos del propio modo en que $f_0 = f_1$, para determinar los valores de estas nuevas cantidades, nos servirán las siguientes ecuaciones, ya en el (§. 13) consideradas:

$$f_0 + f_1 = 4.002; \quad \text{y} \quad 2g_0^2 + f_0 f_1 = 14.01801.$$

De las cuales, con grande aproximacion, se deduce, en efecto, que

$$f_0 = f_1 = 2.001.$$

Si, para comprobar estas diversas conclusiones, formamos el trinomio $x^2 + f_0 x + g_0^2$, y le elevamos al cuadrado, nos resultará el polinomio siguiente, que apenas difiere del primer miembro de la ecuacion propuesta:

$$(x^2 + 2.001\,x + 4.002)^2 =$$

$$x^6 + 4.002\,x^5 + 14.018001\,x^4 + 20.038014\,x + 25.070049.$$

Mas, á pesar de semejante coincidencia, ¿será posible todavía definir, con mayor grado de aproximacion á la verdad, los valores de g_0^2 y g_1^2, y de f_0 y f_1, suponiendo que los dos primeros y los dos últimos no sean absoluta ó completamente iguales?—Tratemos de averiguarlo.

De los valores, que suponemos ya conocidos, de g_0^2 y f_0, ó de g_1^2 y f_1, se deduce por de pronto que

$$\log g_0 = 0.3497888, \quad \text{y} \quad \varphi_0 = 63^\circ\, 26'\, 26''\, 4;$$

ó, más sencillamente, que

$$\log g_0 = 0.3498000, \quad \text{y} \quad \varphi_0 = 63^\circ\, 26'\, 20''$$

Con estos valores de log g_0 y de φ_0, y con auxilio de las tablas de logaritmos de *diez* y de *siete* decimales, necesarias en este caso, de las fórmulas (88) se deducen luégo los resultados numéricos adjuntos:

$$+g_0^4 \cos 4\varphi_0 = -\ 7.0137170573$$
$$-\alpha_1 g_0^3 \cos 3\varphi_0 = +\ 44.1162372122$$
$$+\alpha_2 g_0^2 \cos 2\varphi_0 = -\ 42.1228012449$$
$$-\alpha_3 g_0 \cos \varphi_0 = -\ 20.0498010266$$
$$+\alpha_4 = +\ 25.07005$$

$$[(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = P \cos Q = -\ 0.0000321166$$

$$+g_0^4 \operatorname{sen} 4\varphi_0 = -\ 24.0716609670$$
$$-\alpha_1 g_0^3 \operatorname{sen} 3\varphi_0 = +\ 8.0305364993$$
$$+\alpha_2 g_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi_0 = +\ 56.1476453709$$
$$-\alpha_3 g_0 \operatorname{sen} \varphi_0 = -\ 40.1064968325$$

$$[(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0] = P \operatorname{sen} Q = +\ 0.0000240707$$

$$+4 g_0^4 \cos 4\varphi_0 = -\ 28.0548682292$$
$$-3\alpha_1 g_0^3 \cos 3\varphi_0 = +\ 132.3487116366$$
$$+2\alpha_2 g_0^2 \cos 2\varphi_0 = -\ 84.2456024898$$
$$-\alpha_3 g_0 \cos \varphi_0 = -\ 20.0498010266$$

$$[n(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = \rho \cos \psi = -\ 0.0015601090$$

$$+4 g_0^4 \operatorname{sen} 4\varphi_0 = -\ 96.2866438680$$
$$-3\alpha_1 g_0^3 \operatorname{sen} 3\varphi_0 = +\ 24.0916094979$$
$$+2\alpha_2 g_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi_0 = +\ 112.2952907418$$
$$-\alpha_3 g_0 \operatorname{sen} \varphi_0 = -\ 40.1064968325$$

$$[n(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0] = \rho \operatorname{sen} \psi = -\ 0.0062404608$$

$$+3.4.g_0^4 \cos 4\varphi_0 = -\ 84.1646047$$
$$-2.3\alpha_1 g_0^3 \cos 3\varphi_0 = +\ 264.6974233$$
$$+1.2\alpha_2 g_0^2 \cos 2\varphi_0 = -\ 84.2872161$$

$$[n(n-1)(-g_0^n) \cos n\varphi_0] = \rho' \cos \psi' = +\ 96.2872161$$

$$+3.4.g_0^4 \operatorname{sen} 4\varphi_0 = -\ 288.8599316$$
$$-2.3\alpha_1 g_0^3 \operatorname{sen} 3\varphi_0 = +\ 48.1832190$$
$$+1.2.\alpha_2 g_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi_0 = +\ 112.2952907$$

$$[n(n-1)(-g_0^n) \operatorname{sen} n\varphi_0] = \rho' \operatorname{sen} \psi' = -\ 128.3814219$$

De donde se deduce que

$$\left.\begin{array}{l}\log P = \bar{5}.603531;\\ \log \rho = \bar{3}.808380;\\ \log \rho' = 2.205414\end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l}Q = 143^\circ\ 8'\ 57''.0;\\ \psi = 255\ 57\ 49\ .7;\\ \psi' = 306\ 52\ 13\ .0\end{array}\right\}$$

Los valores de las cantidades auxiliares, δ y γ, podrán ya calcularse con auxilio de las fórmulas (91), y serán éstos:

$$\log \delta = 9.054660; \quad \text{y} \quad \gamma = 8^\circ 3' 29''.35$$

Y, suponiendo que $\cos(\varphi - \varphi_0) = 1$ y $\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) = \Delta\varphi_0 \times \operatorname{sen} 1''$, de la primera de las (94) y segunda de las (95), se concluirá luégo que

$$\frac{g_0}{g} = 1 - 0.000025276 \pm 0.000699739; \text{ y}$$

$$\Delta\varphi_0 = +6''.417 \pm 20''.435$$

En vez de la primera (94) hubiera podido tambien emplearse la (95); y entónces el resultado hubiera sido éste:

$$\Delta \log g_0 = -0.0000111 \pm 0.0003039.$$

Los valores corregidos de $\log g$ y de φ, adoptados para comenzar este cálculo de aproximacion, serán, pues, los que siguen:

$$\left.\begin{array}{l}\log g_0 = 0.3500928\\ \log g_1 = 0.3494850\end{array}\right\}, \text{ y } \left.\begin{array}{l}\varphi_0 = 63^\circ 26' 46''.85\\ \varphi_0 = 63\ 26\ \ 5\ .98\end{array}\right\}.$$

Los verdaderos valores, conocidos *a priori* por representar el primer miembro de la ecuacion propuesta (2°) el producto de los cuatro factores

$$(x + 1.001 \pm 2.003\sqrt{-1}), \quad \text{y} \quad (x + 1.000 \pm 2.000\sqrt{-1}),$$

son estos otros:

$$\left.\begin{array}{l}\log g_0 = 0.3500926\\ \log g_1 = 0.3494850\end{array}\right\}, \text{ y } \left.\begin{array}{l}\varphi_0 = 63^\circ\, 26'\, 47''.\, 01\\ \varphi_1 = 63\ \ 26\ \ \ 5\ \ .\, 82\end{array}\right\},$$

que apénas discrepan de los precedentes.—La separacion ó distincion de los *módulos* y de los *arcos auxiliares* queda con esto verificada; y, con auxilio de los valores numéricos encontrados, y correspondientes á estas cantidades, la ecuacion propuesta se resuelve sin dificultad en el producto de los cuatro factores adjuntos:

$$(x + 1.0010021 \pm 2.0030005\sqrt{-1}), \text{ y}$$

$$(x + 0.9999979 \pm 2.0000009\sqrt{-1})$$

La discrepancia entre estos factores y los verdaderos procede de pequeños errores, inevitables en el cálculo logarítmico; ó, en general, en todos los cálculos de aproximacion con números tambien meramente aproximados á la verdad.

APÉNDICE.

Notas y adiciones á la doctrina matemática, expuesta en los capítulos anteriores.

A.—*Expresion de* sen $n\varphi$ *y de* cos $n\varphi$ *en funcion de* sen φ *ó de* cos φ.

El problema sobre que versa esta *Nota*, y del cual se hizo en el §. 17 de la MEMORIA precedente una aplicacion muy importante, se halla resuelto en diversos tratados de Trigonometría; pero en ninguno, tal vez, por procedimiento tan directo y general, y tan sencillo y elegante, como en los *Nuevos Anales de Matemáticas*, tomo XII, correspondiente al año de 1873, páginas 408 á 417. La nueva solucion, ideada por Mr. Mourgue, es la transcrita á renglon seguido, literalmente casi.

I.—PROBLEMA PRELIMINAR Y FUNDAMENTAL.

«Suponiendo que tres términos consecutivos de la serie $A_0, A_1, A_2 \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$ se hallen entre sí y con la constante k relacionados como esta ecuacion indica,

$$(1) \qquad A_n = k A_{n-1} - A_{n-2},$$

determinar el valor del término general, A_n, en funcion de la

misma constante k y de los dos primeros términos de la serie propuesta, A_0 y A_1.»

(a)—Para resolver el problema así enunciado, comiéncese por aplicar la definicion de la serie, resumida en la ecuacion (1), á la formacion de sus primeros términos; y desde luégo se deducirá que

$$(2)\quad \begin{cases} A_2 = k A_1 - A_0 \\ A_3 = (k^2 - 1) A_1 - k A_0 \\ A_4 = (k^3 - 2k) A_1 - (k^2 - 1) A_0 \\ A_5 = (k^4 - 3k^2 + 1) A_1 - (k^3 - 2k) A_0 \\ A_6 = (k^5 - 4k^3 + 3k) A_1 - (k^4 - 3k^2 + 1) A_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Y del exámen de estas varias relaciones particulares entre las cantidades comparadas se concluye:

1.° Que todos los términos A_2, A_3, A_4, ..., son funciones *lineales* de los dos primeros, A_0 y A_1.

2.° Que el coeficiente de A_0 en una igualdad, ó relacion particular cualquiera, coincide, prescindiendo del signo, con el de A_1 en la relacion precedente.

Y 3.° Que un coeficiente cualquiera de A_1 ó de A_0 se forma, con auxilio de los dos coeficientes anteriores inmediatos y de la constante k, por la misma regla, aplicable á la deduccion de los términos consecutivos de la serie, que la ecuacion fundamental (1) indica.

La primera de estas tres conclusiones es sin ninguna duda general, y no necesita demostrarse. Y la generalidad de las otras dos se demuestra por un procedimiento muy sencillo, y admitido como irreprochable en multitud de casos análogos.

(b)—Supongamos para ello que en la composicion de los términos A_{n-1} y A_n se verifiquen las propiedades advertidas en los diversos términos del cuadro ó sistema de relacio-

nes (2). Pues si, por brevedad, representamos por P_{n-1} y P_{n-2} los coeficientes de A_1 y de A_0 en el término general A_n, inmediatamente se podrá escribir lo que sigue:

$$(3)\quad \begin{cases} A_{n-1} = P_{n-2} A_1 - P_{n-3} A_0, & \text{y} \\ A_n = P_{n-1} A_1 - P_{n-2} A_0 \end{cases}$$

Y como, por definicion,

$$A_{n+1} = k A_n - A_{n-1},$$

conclúyese de ambos antecedentes que

$$A_{n+1} = k (P_{n-1} A_1 - P_{n-2} A_0) - (P_{n-2} A_1 - P_{n-3} A_0); \text{ ó}$$

$$(4)\quad A_{n+1} = (k P_{n-1} - P_{n-2}) A_1 - (k P_{n-2} - P_{n-3}) A_0$$

Y, poniendo por n el índice $n+1$, que

$$A_{n+2} = (k P_n - P_{n-1}) A_1 - (k P_{n-1} - P_{n-2}) A_0$$

Si, pues, los términos A_3 y A_2 de la serie propuesta se deducen de los A_1 y A_0, y de la constante k, del modo referido, y explícitamente consignado en el cuadro (2), evidente es, en virtud de las dos últimas ecuaciones, que el A_4 se formará del mismo modo; y del mismo tambien que el A_4, todos los demas consecutivos.

(*c*)—Con los coeficientes de A_0 ó A_1, que en el grupo de igualdades (2) figuran, puede formarse este otro, digno tambien de especial consideracion:

$$(5)\quad \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = k \\ P_2 = k^2 - 1 \\ P_3 = k^3 - 2k \\ P_4 = k^4 - 3k^2 + 1 \\ P_5 = k^5 - 4k^3 + 3k \\ P_6 = k^6 - 5k^4 + 6k^2 - 1 \\ P_7 = k^7 - 6k^5 + 10k^3 - 4k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Y en el cual es muy fácil advertir:

1.° Que, con relacion á la letra k, todos los términos de los segundos miembros, alternadamente positivos y negativos, son de órden ó grado *par* ó *impar*.

2.° Que un coeficiente cualquiera de k es igual, prescindiendo de los signos, al inmediatamente superior ó colocado encima, más el superior inmediato de éste, situado á su izquierda en el grupo ó serie de relaciones expuestas.

Y 3.° Que, prescindiendo tambien de los de la primera columna vertical, iguales todos á la unidad, un coeficiente cualquiera, perteneciente á las demas columnas, es igual á la suma de los coeficientes de la columna anterior de la izquierda, desde el primero, ó más alto, hasta el que precede dos lugares, en el sentido vertical, al coeficiente de que en particular se trata.

(d)—Para cerciorarnos de si son, ó no, generales estas tres propiedades, advertidas en la formacion de los coeficientes P_0, P_1, P_2, P_3, ..., supongamos, de acuerdo con lo observado en los primeros casos particulares, que

$$(6)\begin{cases} P_{n-2} = k^{n-2} - a_{n-2}\,k^{n-4} + b_{n-2}\,k^{n-6} - c_{n-2}\,k^{n-8} + \ldots\ldots, \\ P_{n-1} = k^{n-1} - a_{n-1}\,k^{n-3} + b_{n-1}\,k^{n-5} - c_{n-1}\,k^{n-7} + \ldots\ldots \end{cases}$$

Y como, segun lo demostrado anteriormente, (4),

$$P_n = k\,P_{n-1} - P_{n-2},$$

concluiremos sin dificultad que

$$(7)\quad P_n = k^n - (a_{n-1} + 1)\,k^{n-2} + (b_{n-1} + a_{n-2})\,k^{n-4} - (c_{n-1} + b_{n-2})\,k^{n-6} + (d_{n-1} + c_{n-2})\,k^{n-8} - \ldots\ldots$$

Igualdad ésta que, rectamente interpretada, corrobora la certidumbre ó generalidad de las dos primeras proposiciones ó leyes, poco ántes enunciadas, y que se trataba de demostrar.

Pues la exactitud de la tercera se desprende como corolario sencillísimo de lo acabado de exponer.

En efecto: si, de conformidad con la notacion empleada en las ecuaciones (6), escribimos la siguiente,

$$(8)\quad P_n = k^n - a_n k^{n-2} + b_n k^{n-4} - c_n k^{n-6} + \ldots\ldots,$$

y comparamos los coeficientes abreviados de esta ecuacion con los más explícitos de la (7), resultará que

$$(9)\quad a_n = a_{n-1} + 1;\ b_n = b_{n-1} + a_{n-2};\ c_n = c_{n-1} + b_{n-2};\ \ldots\ldots$$

Y de estas igualdades, por simples cambios de índice, se deducirán los siguientes sistemas análogos: (10)

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_{n-1}+1 \\ a_{n-1} = a_{n-2}+1 \\ a_{n-2} = a_{n-3}+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l} b_n = b_{n-1}+a_{n-2} \\ b_{n-1} = b_{n-2}+a_{n-3} \\ b_{n-2} = b_{n-3}+a_{n-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l} c_n = c_{n-1}+b_{n-2} \\ c_{n-1} = c_{n-2}+b_{n-3} \\ c_{n-2} = c_{n-3}+b_{n-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};\ldots\ldots$$

Y, sumando ordenadamente cada uno de estos grupos de ecuaciones, dedúcese, en conclusion, y conforme la tercera ley pide, que

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} a_n = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\ b_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + \ldots\ldots \\ c_n = b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En el primero de los grupos (10) la última ecuacion sería

$$a_2 = a_1 + 1;\quad \text{ó}\quad a_2 = 1:$$

puesto que, consultando el cuadro de coeficientes (5), inmediatamente se advierte que a_1 es igual á *cero*. Resulta, pues, que a_n es igual á la suma de $n - 1$ unidades: *dos ménos* que términos comprende la primera columna vertical de la izquierda, desde el inferior, $a_0 = 0$, hasta el superior, ó el a_n inclusive. Lo cual constituye un caso particular de la regla de composicion á que evidentemente se hallan sometidos los

valores de b_n, c_n, ..., conforme en los primeros casos examinados se advirtió, y era indispensable demostrar en general.

(*e*)—En la composicion del término A_n, (3), figuran como coeficientes de A_1 y A_0 los designados por P_{n-1} y P_{n-2}, relacionados con la constante k, y las letras a, b, c, ..., del modo que las ecuaciones (6) indican. Pues, apoyándonos en lo acabado de exponer y demostrar, procuremos ahora expresar los valores de aquellas P en funcion exclusiva de la constante k y del índice n: con lo cual el término general de la serie, A_n, lo estará en funcion de estas mismas dos cantidades, k y n, y de los primeros términos, A_0 y A_1.

Por de pronto sábese ya que

$$(12) \qquad a_{n-1} = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots = \frac{n-2}{1} = N_1$$

De donde se deduce que

$$(13) \qquad b_{n-1} = a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \ldots\ldots =$$

$$(n-4) + (n-5) + (n-6) + \ldots\ldots = \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} = N_2$$

Y del propio modo, que

$$(14) \qquad c_{n-1} = b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5} + \ldots\ldots =$$

$$\tfrac{1}{2}\{(n-5)(n-6) + (n-6)(n-7) + \ldots\ldots\} =$$

$$\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} = N_3;$$

$$(15) \qquad d_{n-1} = c_{n-3} + c_{n-4} + c_{n-5} + \ldots\ldots =$$

$$\tfrac{1}{6}\{(n-6)(n-7)(n-8) + (n-7)(n-8)(n-9) + \ldots\ldots\} =$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4} = N_4;$$

y así todos los demás valores de los coeficientes de P_{n-1};

cuya ley ó regla de composicion es bien patente y sencilla (*).

Sustituyendo estos valores de a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, ..., y los de a_{n-2}, b_{n-2}, c_{n-2}, ..., que de ellos se deducirían por el simple cambio de n por $n-1$, en las ecuaciones (6); y los de P_{n-1} y P_{n-2}, por efecto de esta sustitucion obtenidos, en la segunda de las (3), nos resultará, por último, la siguiente expresion de A_n, que es la buscada, y en la cual las letras M y N representan por brevedad lo que en el §. 17 de la MEMORIA se convino que representasen: (16)

(*) Aunque en el texto original de donde procede esta primera parte del *Apéndice* no se indique el modo de reducir los valores de c_{n-1}, d_{n-1}, ... á las formas N_3, N_4, ..., bien fácil es adivinarle y penetrarse de su generalidad, segun puede verse en un ejemplo.

Prescindiendo de los valores de a_{n-1} y b_{n-1}, cuya reduccion á las sencillísimas formas N_1 y N_2 debe ya considerarse como demostrada ó evidente, fijémonos en el de $2c_{n-1}$, igual á

$$(n-5)(n-6)+(n-6)(n-7)+(n-7)(n-8)+\ldots\ldots,$$

y que tambien puede escribirse de este otro modo:

$$\left.\begin{array}{r}
n(n-5)+n(n-6)+n(n-7)+n(n-8)+\ldots\ldots \\
-6(n-5)-6(n-6)-6(n-7)-6(n-8)-\ldots\ldots \\
-(n-6)-(n-7)-(n-8)-\ldots\ldots \\
-(n-7)-(n-8)-\ldots\ldots \\
-(n-8)-\ldots\ldots \\
\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

De donde, por transformaciones sencillísimas, basadas en el conocimiento de la forma precedente, de b_{n-1} en este caso, se deduce que

$$2c_{n-1}=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2}-c_{n-1};\ \text{ó}\ c_{n-1}=N_3$$

Y, por los mismos pasos, se concluiría que $d_{n-1}=N_4$; y así las demas expresiones análogas consecutivas.

$$(16) \qquad A_n =$$

$$\{k^{n-1} - N_1 k^{n-3} + N_2 k^{n-5} - N_3 k^{n-7} + N_4 k^{n-9} - \ldots\ldots\} A_1 -$$

$$\{k^{n-2} - \frac{2M_2}{M_1} k^{n-4} + \frac{3M_3}{M_1} k^{n-6} - \frac{4M_4}{M_1} k^{n-8} + \ldots\ldots\} A_0$$

II.—Aplicaciones.

1.ª De las ecuaciones fundamentales de la *Trigonometría*,

$$\text{sen}\,(\varphi + \psi) = \text{sen}\,\varphi \cos\psi + \cos\varphi\,\text{sen}\,\psi, \quad \text{y}$$

$$\text{sen}\,(\varphi - \psi) = \text{sen}\,\varphi \cos\psi - \cos\varphi\,\text{sen}\,\psi$$

se deduce, por sustraccion una de otra, la que sigue:

$$\text{sen}\,(\varphi + \psi) = 2\cos\varphi\,\text{sen}\,\psi + \text{sen}\,(\varphi - \psi).$$

Y, suponiendo que ψ sea igual á $(n-1)\varphi$, esta otra:

$$(17) \qquad \text{sen}\,n\varphi = 2\cos\varphi \,.\, \text{sen}\,(n-1)\varphi - \text{sen}\,(n-2)\varphi$$

Comparando esta relacion de cantidades con la (1), se advierte que los términos de la serie á que aquella ecuacion se refiere, A_n, A_{n-1} y A_{n-2}, se hallan reemplazados ahora por sen $n\varphi$, sen $(n-1)\varphi$ y sen $(n-2)\varphi$; los A_1 y A_0 por sen φ y *cero;* y la constante k por $2\cos\varphi$. Luego la ecuacion general (16) se transformará en este caso en la que sigue, aplicable á cualquier valor entero y positivo de n, y cuyo segundo miembro debe terminar allí donde el exponente de $2\cos\varphi$ sea igual á *cero* ó á la *unidad:* (18)

$$\frac{\text{sen}\,n\varphi}{\text{sen}\,\varphi} = (2\cos\varphi)^{n-1} - N_1 (2\cos\varphi)^{n-3} + N_2 (2\cos\varphi)^{n-5} - \ldots\ldots$$

Si, en vez de φ, ponemos en esta última ecuacion $(^1/_2\pi - \varphi)$, los *cosenos* del segundo miembro se transformarán en *senos* del mismo arco φ, sin alteracion de los coeficientes N, ni de los signos que les preceden; y el primer miembro en esta otra expresion:

$$\frac{\text{sen}\,.\,n\,(^1/_2\,\pi - \varphi)}{\cos\varphi}, \text{ igual ó equivalente}$$

á $+\dfrac{\text{sen}\,n\varphi}{\cos\varphi}$, si n es *par*, de la forma $4p+2$;

á $-\dfrac{\text{sen}\,n\varphi}{\cos\varphi}$, si *par* tambien, pero de la forma $4p$,

á $+\dfrac{\cos n\varphi}{\cos\varphi}$, si *impar*, de la forma $4p+1$; y

á $-\dfrac{\cos n\varphi}{\cos\varphi}$, si tambien impar, de la forma $4p-1$.

Ó, más compendiosamente: el primer miembro de la ecuacion (18), transformada por el cambio de φ en $(^1/_2\,\pi - \varphi)$, será igual

á $(\sqrt{-1})^{n+2}\dfrac{\text{sen}\,n\varphi}{\cos\varphi}$, cuando n sea *par;* y

á $(\sqrt{-1})^{n-1}\dfrac{\cos n\varphi}{\cos\varphi}$, cuando número *impar*.

2.ª De las otras dos ecuaciones fundamentales de la Trigonometría

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\psi, \quad \text{y}$$

$$\cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cos\psi + \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\psi$$

se deduce, por adicion de una con otra, primero, y sustitucion, despues, de la letra ψ por $(n-1)\varphi$, la siguiente:

$$\cos n\varphi = 2\cos\varphi\,.\,\cos(n-1)\varphi - \cos(n-2)\varphi:$$

comprendida en la expresion general (1); y en la cual los términos de la serie que simboliza, A_n, A_{n-1} y A_{n-2}, se hallan reemplazados por $\cos n\varphi$, $\cos(n-1)\varphi$ y $\cos(n-2)\varphi$; los A_1 y A_0 por $\cos\varphi$ y 1; y la letra k, como en la (17), por $2\cos\varphi$. Inmediatamente se deduce, pues, aplicando la ecuacion (16) al caso particular de que ahora se trata, y duplicando los dos miembros de la expresion resultante, que

$$2\cos n\varphi - (2\cos\varphi)^n =$$

$$-N_1(2\cos\varphi)^{n-2} + N_2(2\cos\varphi)^{n-4} - N_3(2\cos\varphi)^{n-6} + \ldots\ldots$$

$$-2(2\cos\varphi)^{n-2} + 4\frac{M_2}{M_1}(2\cos\varphi)^{n-4} - 6\frac{M_3}{M_1}(2\cos\varphi)^{n-6} + \ldots\ldots$$

Para simplificar esta ecuacion, por la reduccion á uno solo de los dos términos del segundo miembro, en los cuales $\cos\varphi$ figura con el mismo exponente, basta advertir que con un coeficiente de la forma N_p, igual á

$$\frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots\ldots(n-2p)}{1.2.3\ldots\ldots p},$$

perteneciente al primér grupo ó línea de términos, hay que sumar otro, correspondiente á la línea inferior, representado por

$$2p\frac{M_p}{M_1} = \frac{2(n-p-1)(n-p-2)\ldots\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots\ldots(p-1)}$$

Y el resultado de esta suma, $N_p + 2p\frac{M_p}{M_1}$, ó el coeficiente general del desarrollo de $2\cos n\varphi$, será precisamente igual á M_p, ó á

$$\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots\ldots(p-1)p}:$$

en el cual p designa el número de términos que preceden al, en cada caso particular, considerado; y tambien el de facto-

res que para la composicion del numerador y del denominador de su coeficiente deben tomarse. Por lo tanto: (20)

$$2\cos n\varphi = (2\cos\varphi)^n - M_1(2\cos\varphi)^{n-2} + M_2(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots\ldots$$

Esta ecuacion es aplicable á todos los valores enteros y positivos de *n:* debiendo prolongarse su segundo miembro hasta que el exponente de $2\cos\varphi$ sea igual á cero, cuando *n* sea número *par;* y hasta que el mismo exponente se reduzca á la unidad, cuando *impar*. En este último caso todos los términos del segundo miembro podrán dividirse por $2\cos\varphi$; pero en el anterior supuesto habrá que admitir en el postrer término del cociente el exponente -1, aplicado al factor $2\cos\varphi$, si se quiere conservar tambien la forma entera en el resultado. Con esta advertencia, en vez de la ecuacion (20), podremos escribir la siguiente, asimilable á la (18): (21)

$$\frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi} = (2\cos\varphi)^{n-1} - M_1(2\cos\varphi)^{n-3} + M_2(2\cos\varphi)^{n-5} - \ldots\ldots$$

Poniendo en la última ecuacion por φ su complemento, $(^1/_2\pi - \varphi)$, los cosenos del segundo miembro se transformarán en senos de φ; y el primer miembro se convertirá en

$$\frac{\cos . n\,(^1/_2\pi - \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}: \text{ equivalente}$$

á $(\sqrt{-1})^{n-1}\dfrac{\operatorname{sen} n\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$, cuando *n* sea número *impar;* y

á $(\sqrt{-1})^{n}\dfrac{\cos n\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$, cuando *par* el mismo número.

Esta advertencia, como la hecha á continuacion de la ecuacion (18), se aclararán particularizando la cuestion en un par de ejemplos.

Supongamos que $n = 8$; y de las ecuaciones (18) y (21) se deducirá que

$$\frac{\text{sen } 8\varphi}{\text{sen } \varphi} = 128 \cos^7 \varphi - 192 \cos^5 \varphi + 80 \cos^3 \varphi - 24 \cos \varphi; \quad \text{y}$$

$$\cos 8\varphi = 128 \cos^8 \varphi - 256 \cos^6 \varphi + 160 \cos^4 \varphi - 32 \cos^2 \varphi + 1$$

Y, si en estas dos ecuaciones ponemos por φ su complemento $(^1/_2 \pi - \varphi)$, obtendremos las que siguen:

$$\frac{-\text{sen } 8\varphi}{\cos \varphi} = 128 \text{ sen}^7 \varphi - 192 \text{ sen}^5 \varphi + 80 \text{ sen}^3 \varphi - 24 \text{ sen } \varphi; \quad \text{y}$$

$$\cos 8\varphi = 128 \text{ sen}^8 \varphi - 256 \text{ sen}^6 \varphi + 160 \text{ sen}^4 \varphi - 32 \text{ sen}^2 \varphi + 1$$

Del propio modo, cuando $n = 9$, inmediatamente se concluirá que

$$\frac{\text{sen } 9\varphi}{\text{sen } \varphi} = 256 \cos^8 \varphi - 448 \cos^6 \varphi + 240 \cos^4 \varphi - 40 \cos^2 \varphi + 1; \text{ y}$$

$$\cos 9\varphi = 256 \cos^9 \varphi - 576 \cos^7 \varphi + 432 \cos^5 \varphi - 120 \cos^3 \varphi + 9 \cos \varphi$$

Y, por el cambio de φ en $(^1/_2 \pi - \varphi)$, lo siguiente:

$$\frac{\cos 9\varphi}{\cos \varphi} = 256 \text{ sen}^8 \varphi - 448 \text{ sen}^6 \varphi + 240 \text{ sen}^4 \varphi - 40 \text{ sen}^2 \varphi + 1; \text{ y}$$

$$\text{sen } 9\varphi = 256 \text{ sen}^9 \varphi - 576 \text{ sen}^7 \varphi + 432 \text{ sen}^5 \varphi - 120 \text{ sen}^3 \varphi + 9 \text{ sen} \varphi$$

3.ª La ecuacion general (16) es aplicable tambien á la expresion ó desarrollo, en funcion de $(x + \frac{1}{x})$, tanto del binomio $(x^n - \frac{1}{x^n})$, como del $(x^n + \frac{1}{x^n})$.

En efecto:

$$x^n - \frac{1}{x^n} = (x + \frac{1}{x})(x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}}) - (x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}}); \text{ y}$$

$$x^n + \frac{1}{x^n} = (x + \frac{1}{x})(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}) - (x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}})$$

Y estas ecuaciones pueden identificarse con la (1), de donde la (16) procede, con sólo suponer en la primera, que

$$A_n = x^n - \frac{1}{x^n}; \quad A_1 = x - \frac{1}{x}; \quad A_0 = 0; \quad \text{y} \quad k = x + \frac{1}{x};$$

y, en la segunda, que

$$A_n = x^n + \frac{1}{x^n}; \quad A_1 = x + \frac{1}{x}; \quad A_0 = 2; \quad \text{y} \quad k = x + \frac{1}{x}$$

El desarrollo de $\dfrac{x^n - \frac{1}{x^n}}{x - \frac{1}{x}}$ sólo diferirá del de $\dfrac{\operatorname{sen} n\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$, poco ántes obtenido, por el cambio de $2\cos\varphi$ en $x + \frac{1}{x}$; y el de $\dfrac{x^n + \frac{1}{x^n}}{x + \frac{1}{x}}$ del de $\dfrac{\cos n\varphi}{\cos\varphi}$ por la misma leve transmutacion de símbolos. Y es cosa muy natural que así suceda.

Porque si suponemos que á la letra x se atribuye el valor particular $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)$, por transformaciones sencillísimas y muy conocidas, inferiremos sucesivamente que

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi;$$

$$\frac{1}{x} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi;$$

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\varphi; \quad \text{y} \quad x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi$$

Y, del propio modo, que

$$x^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, n\varphi;$$

$$\frac{1}{x^n} = \cos n\varphi - \sqrt{-1}\,\text{sen}\, n\varphi;$$

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\varphi; \quad \text{y} \quad x^n - \frac{1}{x^n} = 2\sqrt{-1}\,\text{sen}\, n\varphi$$

Luego

$$\frac{x^n - \frac{1}{x^n}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\text{sen}\, n\varphi}{\text{sen}\,\varphi}; \quad \text{y} \quad \frac{x^n + \frac{1}{x^n}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi}$$

Con lo cual la conexion y como identidad de unas expresiones con otras, en la apariencia tan distintas, queda perfectamente demostrada.

B.—Sobre el método de aproximacion de Newton.

En diferentes lugares de la Memoria que precede hemos empleado el método propuesto por Newton para completar la solucion de las ecuaciones numéricas, iniciada y proseguida con suma sencillez y hasta muy avanzado punto por el procedimiento de Gräffe.

En qué el mencionado método de aproximacion consiste y los principios teóricos en que se funda, hállanse tambien muy detenidamente explicados en los §§. 8, 14 y 23. Y en estos mismos párrafos, pero más especialmente todavía en los 29 y 31, hánse apuntado los casos principales en que tan ingenioso método de cálculo puede en algun concepto fallar, y las precauciones que para evitar cualquier error, imperfeccion ó ambigüedad en los resultados por su medio obtenidos, deben adoptarse entónces. Precisamente en esto último consiste una de las más notables adiciones que al método del matemático suizo Gräffe agregó el astrónomo y gran analista prusiano Encke.

Los defectos ó inconvenientes de la regla propuesta por Newton para el cálculo de las raices numéricas de una ecuacion, en su famoso *Método de las Fluxiones*, y como consecuencia ó aplicacion utilísima de los primeros principios del *Cálculo Diferencial*, por entónces naciente, fueron bien pronto advertidos por los matemáticos de aquella época. Lagrange, en el prólogo de su célebre *Tratado de la Resolucion de las Ecuaciones Numéricas*, publicado por vez primera en 1767, y reimpreso con multitud de notas y adiciones en 1798 y 1808, los recapitula en estas muy significativas palabras:

«Tal es el método de Newton, comunmente empleado para resolver las ecuaciones numéricas; pero que, bien considerado, sirve tan solo para resolver las ecuaciones *ya casi resuel-*

tas. Y ni áun entónces es *seguro* ó de oportunidad incuestionable; porque, despreciando al practicarle, en cada operacion ó cálculo de las aproximaciones sucesivas, algunos términos cuyo valor se desconoce, es imposible apreciar el grado de aproximacion de la correccion obtenida. Y áun puede acontecer, cuando las ecuaciones posean raices *casi iguales*, que la serie de términos despreciados no sea en realidad despreciable, ó por muy poco convergente, ó por divergente al fin, por más que en un principio fuere convergente.»

En la *Nota V* del mismo *Tratado*, Lagrange procura demostrar lo fundado de tan acerba crítica; y, por consideraciones teóricas muy sutiles, deduce en conclusion:

Que si α, β, γ ....., representan las m raices de una ecuacion del grado m, de cualquier modo distribuidas, ó sin consideracion alguna á sus magnitudes y signos, ni áun naturaleza; a el valor aproximado de la raiz α; h la correccion de este valor obtenida por la regla de Newton: $h = -\frac{f(a)}{f'(a)}$; y R esta funcion de las otras raices y del valor a:

$$R = \frac{1}{\beta - a} + \frac{1}{\gamma - a} + \frac{1}{\delta - a} \ldots\ldots;$$

el valor corregido $a + h$ expresará, sin incertidumbre de ningun género, el de α, con mayor aproximacion á la verdad que a, sólo cuando esta condicion se verifique:

$$2(\alpha - a)R + 1 > 0.$$

Pues bien: si β, γ, δ, ... difieren considerablemente de α, ó si a es solo valor aproximado de esta raiz, R estará representada por una suma de fracciones muy pequeñas; y el producto $2(\alpha - a)R$, positivo ó negativo, valdrá casi siempre ménos que la unidad, y tanto ménos cuanto más ya se aproxime el valor a á su límite α: de manera que entónces la aplicacion del método de Newton será muy racional y permitida. Pero en el supuesto contrario, ó cuando unas de otras

discrepen muy poco dos ó más raices, α, β, γ, ..., y a pueda mirarse como valor comun muy aproximado de las mismas, la condicion establecida se verificará ó no, segun los casos, y dependerá, más que de la magnitud absoluta de las diferencias $\alpha - a$, $\beta - a$, $\gamma - a$, ..., de la combinacion como fortuita de sus signos: y ninguna consecuencia utilizable podrá inferirse *à priori* de este análisis. Cuando evidentemente la desigualdad condicional deducida por Lagrange se verificará, discrepen poco ó mucho unas de otras las raices reales de la ecuacion propuesta, ó de las reales los términos de este nombre componentes de las imaginarias, es cuando las expresadas diferencias, $\alpha - a$, $\beta - a$, ..., sean positivas todas, ó todas negativas: ó cuando a sea mayor ó menor que la raiz real más grande ó más pequeña de cuantas la ecuacion contiene, á condicion de hallarse comprendidas tambien entre las dos raices reales, máxima y mínima, las porciones ó términos reales de las raices imaginarias.—En este caso, de ninguna ó muy menguada utilidad práctica, el método de Newton es aplicable sin vacilacion ni ambigüedad de ningun género: en los demas redúcese aquel método á un simple procedimiento de tanteo, útil muchas veces, ineficaz y hasta perjudicial otras muchas, é incierto y sin atractivo ó encanto siempre.

No es otra la consecuencia final que del análisis de Lagrange se desprende: desconsoladora, sí; pero no de todo punto irrefutable ó irremediable. Porque los matemáticos modernos, aunque amamantados en las obras de Lagrange, y admiradores entusiastas de su preclaro ingenio, no se han conformado con la idea de abandonar el método de Newton por el simple motivo de su ambigüedad, ineficacia ó inexactitud, en algunos casos excepcionales: precisamente en aquellos en que todos los métodos ponen á prueba la paciencia y perspicacia del calculador. Ni era posible que se conformasen de buena voluntad, cuando no habia otro mejor con que sustituirle, ni razon para despreciarle en multitud de otros casos, ateniéndose á él, resolubles con suma facilidad y prontitud.

Fourier, particularmente, en su *Análisis de las Ecuaciones Numéricas*,—libro no ménos célebre que el de Lagrange, publicado, despues de fallecido el autor, por Navier, en 1831,—

se propuso perfeccionarle ó completarle, formulando en términos bien explícitos sus caractéres de validez, en general, ó de ineficacia, por excepcion; y la manera de emplearle con acierto y buen éxito en todos los casos. Y el ejemplo de Fourier puede decirse que ha sido imitado como á porfía por todos sus discípulos: los innumerables y sutilísimos matemáticos de la moderna escuela francesa.

Aunque baste lo dicho en el cuerpo de la MEMORIA para que sepa el lector sobre este punto á qué atenerse, y en el concepto práctico no consideremos factible agregar á lo discurrido y explicado por Encke una palabra más, de verdadera sustancia y sabroso jugo, no obstante, por la precision de las ideas y claridad de la frase, merece incuestionable aprecio el breve trabajo sobre el mismo asunto, pocos años há publicado por el Sr. Darboux, profesor de la *Facultad de Ciencias* de Burdeos. Su método de exposicion de la regla newtoniana, es, en el fondo, el mismo de Fourier; pero tan perfeccionado y reducido á tan sucintos términos que, una vez leido, es casi imposible olvidarle; y más imposible todavía que su primera lectura no sea del agrado de quien abrigue algun séntimiento estético de la belleza en Matemáticas. Traducida de los *Anales* de este nombre (2.ª serie, tomo VIII), y acompañada de breve comentario, la produccion de Darboux dice como sigue.

«Designemos por a y b $(a < b)$ dos números que comprendan *una sola raiz simple* de la ecuacion propuesta

$$f(x) = 0;$$

y admitamos ademas que esta otra ecuacion

$$f''(x) = 0,$$

no posea raiz alguna entre los mismos números, a y b, contenida: ó que la derivada segunda de $f(x)$ no varíe de signo cuando x pase del valor a al b. Respecto á la primera derivada, $f'(x)$, nada supondremos en particular: limitándonos á recordar que, por no contener $f''(x)$ raiz alguna, en-

tre a y b comprendida, $f'(x)$ solo puede contener *una* á lo sumo. (Teorema de Rolle.)

Sustituyendo en la ecuacion propuesta, por x, los números $a+h$ y $b-k$, iguales ambos á la raiz que deseamos determinar, obtendremos estos resultados:

$$0=f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h);\ \text{y}$$

$$0=f(b-k)=f(b)-kf'(b)+\frac{k^2}{2}f''(b-\theta_1 k):$$

en los cuales, como es sabido, θ y θ_1 designan dos números inferiores á la unidad.

Y de estas dos últimas ecuaciones, suponiendo que

$$\alpha=-\frac{f(a)}{f'(a)},\ \text{y}\ \alpha_1=-\frac{h^2}{2}\cdot\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)};$$

$$\beta=+\frac{f(b)}{f'(b)},\ \text{y}\ \beta_1=+\frac{k_2}{2}\cdot\frac{f''(b-\theta_1 k)}{f'(b)},$$

se deduce inmediatamente que:

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{h^2}{2}\cdot\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}=\alpha+\alpha_1;\quad\text{y}$$

$$k=+\frac{f(b)}{f'(b)}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{f''(b-\theta_1 k)}{f'(b)}=\beta+\beta_1$$

Pero si a y b representan dos valores muy aproximados de la raiz única entre ambos comprendida, por defecto uno, y otro por exceso, las correcciones, h y k, de estos valo-

res serán muy pequeñas, y más todavía, y como insignificantes ó despreciables, lo serán tambien, *en general*, los términos complementarios, representados por α_1 y β_1. Por lo tanto, la correccion, positiva ó negativa, de un valor cualquiera aproximado, a, de la raiz de una ecuacion, se podrá determinar con auxilio de la siguiente fórmula, propuesta por Newton:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Pero esto último, cierto y conveniente *en general*, puede no serlo alguna vez, por excepcion; y lo que ahora debemos proponernos averiguar es cuándo lo será y cuándo no: ó qué valor aproximado de x, si el a ó el b, debemos sustituir en la expresion $-\frac{f(x)}{f'(x)}$, para que el resultado, positivo ó negativo, represente siempre, y con *plena seguridad* de acierto, la correccion del valor sustituido ó ensayado.

De los valores de x: a, $a+\alpha$ y $a+\alpha+\alpha_1$, el primero representa el valor, aproximado por defecto, de la raiz buscada; y el último precisamente el exacto de esta misma raiz. Luego el segundo representará *con seguridad* un valor más aproximado á la verdad que a; y, por lo tanto, α deberá considerarse entónces como *verdadera correccion*, si $a+\alpha$ está realmente comprendido entre los dos valores extremos: ó si $a < a+\alpha < a+\alpha+\alpha_1$. De donde se deduce que α y α_1 deben poseer el mismo signo: lo cual implica la igualdad de signos de $f(a)$ y $f''(a+\theta h)$; ó, por no variar de signo $f''(x)$ entre los límites a y b, la igualdad de $f(a)$ y $f''(a)$.

Y del propio modo se concluiría, comparando los tres números b, $b-\beta$ y $b-\beta-\beta_1$, que, si el segundo ha de hallarse comprendido entre los dos extremos, y ser, por lo tanto, β la verdadera correccion del valor b, aproximado por exceso, de la raiz que se busca, los signos de β y β_1, ó de $f(b)$ y $f''(b)$, deben necesariamente coincidir.

Pero las fracciones $\frac{f(a)}{f''(a)}$ y $\frac{f(b)}{f''(b)}$ son de sig-

nos contrarios: luego una sola de las correcciones, resultantes de la sustitucion sucesiva de a y b en la expresion general $-\frac{f(x)}{f'(x)}$, será *con plena seguridad* admisible: la que se deduzca de la aplicacion del teorema siguiente:

Si entre los números a *y* b, *que comprenden una sola raiz simple de la ecuacion* $f(x)=0$, *la derivada segunda de esta ecuacion no cambia de signo nunca, el número que habrá de emplearse en el cálculo de la correccion, por la regla de Newton, y al cual esta correccion debe aplicarse ó referirse, será el que, sustituido en las expresiones* $f(x)$ *y* $f''(x)$, *produzca resultados del mismo signo.*

Completemos todo lo dicho con algunas advertencias y aclaraciones muy importantes.

1.ª La coincidencia de signos de $f(a)$ y $f''(a)$ es condicion *suficiente* para que α merezca considerarse como verdadera correccion de a; pero no absolutamente *necesaria*. Porque, si $a+\alpha > a+\alpha+\alpha_1$, aquella condicion no se verificará; y, sin embargo, podría suceder que $a+\alpha$ difiriese, por *exceso*, de la raiz exacta, $a+\alpha+\alpha_1$, ménos que a, por *defecto;* y áun ménos que el otro número b, por exceso tambien. En este caso, α sería una verdadera correccion; pero ambígua ó incierta *à priori*, y, por este solo motivo, inaceptable.

2.ª Supongamos que a represente el número con respecto al cual la correccion es calculable, por la regla de Newton, con plena seguridad de acierto. Si a es menor que la raiz buscada, $a_1 = a+\alpha$ lo será tambien necesariamente; y si $f(a)$ y $f''(a)$ tienen el mismo signo, el mismo conservarán $f(a_1)$ y $f''(a_1)$. Luego, sin otro exámen ni más vacilacion que la preliminar, la correccion de a_1 será calculable con toda seguridad por el mismo procedimiento que la de a; la de a_2, como las de a_1 y a; y así todas las demas consecutivas que fuere menester ó conviniere deducir.—Lo propio que del límite inferior a puede decirse á propósito del superior b.

3.ª Cuando la correccion se calcule con el número determinado por el teorema precedente, es imposible que la regla

de Newton nos dé un resultado absurdo. Porque el absurdo en este caso sólo puede proceder de ser nulo el denominador de la expresion $-\frac{f(x)}{f'(x)}$; y si $f'(a)$ fuese igual á *cero*, de la ecuacion, necesaria entónces,

$$f(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h)=0,$$

concluiríamos que $f(a)$ y $f''(a)$ no poseen el mismo signo: ó que no es a el número al cual la correccion buscada debe referirse.

4.ª Los diversos valores numéricos

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ldots a_n,\ a_{n+1} \ldots\ldots,$$

inferiores todos á la raiz buscada, convergen sin embargo todos y se aproximan indefinidamente hácia esta misma raiz.

En efecto: por la regla citada,

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Y como la diferencia $a_{n+1}-a_n$ disminuye indefinidamente, porque los números $a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots a_n,\ a_{n+1},\ \ldots\ldots$ son cada vez mayores, sin exceder ninguno del valor de la raiz, resulta, por de pronto, que la fraccion $-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ converge tambien indefinidamente hácia *cero*. Pero siendo $f''(x)$ constantemente *positiva* ó *negativa* entre los límites a y b, $f'(x)$ será *constantemente* tambien *creciente* ó *decreciente* entre los mismos límites; y, por lo tanto, $f'(a_n)$ no podrá tocar en el límite del crecimiento, ó resultar *infinita* nunca, como de suyo es casi evidente. Luego, no sólo la fraccion, sino su numerador $f(a_n)$ propenderá indefinidamente hácia *cero*, como debe suceder si a_n converge hácia la raiz buscada.

Y 5.ª Cuando para valor de la correccion α se adopta el que del uso de esta expresion, nada más que aproximada á la verdad, resulta:

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

el límite, ε, del error que, procediendo así, se comete, puede, muy aproximadamente tambien, representarse de este modo:

$$\varepsilon = -\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{f''(a)}{f'(a)};$$

ú obtenerse poniendo por α_1 el nuevo símbolo, expresion del límite buscado, ε; α por h; y $f''(a)$ por $f''(a+\theta h)$. Ó, sustituyendo por α la expresion $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, y prescindiendo del signo final resultante, que dependerá del valor primitivo, a ó b, de donde las aproximaciones sucesivas proceden, del siguiente:

$$\varepsilon = \frac{\{f(a)\}^2 \times f''(a)}{2\{f'(a)\}^3}$$

Al número ε, calculado por esta fórmula, se sustituirá en la práctica la potencia de $^1/_{10}$ que le sea inmediatamente superior; y así se averiguará cuál debe ser el órden de la última cifra decimal que en el cálculo de la aproximacion subsiguiente puede obtenerse por la division de $-f(a)$ por $f'(a)$ Para mayor seguridad en las operaciones sucesivas convendrá que esta última cifra decimal lo sea siempre aproximada por *defecto*, en absoluto, ó prescindiendo del signo de la correccion; pues entónces los nuevos valores de la raiz buscada, a_1 y b_1, resultarán aproximados, por defecto el primero y el segundo por exceso, lo mismo que los a y b primitivos.»

Nada más sencillo y elegante en teoría que el procedimiento de Newton, así modificado y completado por Darboux.

En la práctica, sin embargo, sobre ser bastante más complicado y enojoso que el primitivo, no siempre podrá plantearse y desenvolverse sin grave dificultad. Para persuadirnos de ello fijémonos en uno solo de sus inconvenientes, que, por cierto, tanto participa del carácter teórico como del práctico.

Cuando, por ejemplo, se nos dé una ecuacion, de grado igual ó superior al 5.°, y hayamos logrado *separar* sus raices reales, y determinar dos números ó valores, uno de otro muy poco discrepantes, y entre los cuales una sola de aquellas raices se encuentre comprendida (operaciones preliminares ambas muy penosas, inevitables, y extrañas en cierto modo al problema que principalmente se trata de resolver), ¿cómo nos cercioraremos de que la *derivada segunda* de la ecuacion propuesta no posee ninguna?—Ni Darboux, ni los demás matemáticos que han procurado perfeccionar la regla de Newton, han formulado procedimiento alguno, sencillo y expedito, para eludir esta tan manifiesta dificultad, que desde luego cierra el paso al calculador; y, sin recurso eficaz para eludirla ó desvanecerla, la ingeniosa modificacion de la regla newtoniana casi no tiene objeto, ó es ilusoria en la práctica.

¿Apelaremos para salir de dudas al teorema de Sturm, aplicado á la separacion de las raices de $f''(x)$?—Excelente procedimiento; pero tan largo y penoso, para usado como por incidencia, que, miéntras en casos un poco complicados se practica, posible es que un calculador experto, prescindiendo del método perfeccionado, y ateniéndose al primitivo de Newton, logre resolver por completo el problema principal.

Pero en lo posible cabe tambien que al pensar y discurrir de este modo nos equivoquemos grandemente; y por lo mismo, y para que nada falte á la ingeniosa teoría de Darboux, transcribimos á continuacion el ejemplo con que procuró ilustrarla y completarla, muy oportunamente, otro de los redactores de los *Nuevos Anales de Matemáticas*, J. Bourget.—Como el mismo ejemplo, demasiado sencillo, se resolvió tambien por el procedimiento de Gräffe, al final del Capítulo I de esta MEMORIA, así podrá el lector desapasionado comparar método con método, y optar por el que más eficaz y preferible en todos conceptos le parezca.

«Consideremos, dice Bourget, la ecuacion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0,$$

de la cual se *derivan* estas otras:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 7; \quad \text{y}$$

$$\tfrac{1}{2} f''(x) = 3x - 3$$

Por la sustitucion en estas funciones de la serie de números 0, 1, 2, 3 ....., en lugar de x, se obtienen los resultados adjuntos:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$\frac{1}{2} f''(x)$
0	+ 4	— 7	— 3
1	— 5	—10	+ 0
2	—14	— 7	+ 3
3	—17	+ 2	+ 6
4	— 8	+17	+ 9
5	+19	+38	+12
0	+ 4	— 7	— 3
—1	+ 7	+ 2	— 6
—2	— 2	+17	— 9

De cuyo exámen se deduce que la ecuacion propuesta posee tres raices *reales* y comprendidas: entre 0 y 1, la x_1; entre 4 y 5, la x_2; y entre — 1 y — 2, la x_3.

Tratemos sucesivamente de la determinacion de estas tres raices.

1.ª—La x_1 se halla comprendida entre 0 y 1; pero, como la funcion $f''(x)$ es nula cuando por x se pone el segundo de estos números, en el signo de esta funcion queda alguna incertidumbre por de pronto. Para disiparla hay que sustituir de nuevo en la ecuacion primitiva, $f(x)=0$, por x otro valor numérico, 0.5 por ejemplo, comprendido entre 0 y 1; y averiguar á cuál de los dos nuevos intérvalos resultantes corresponde la raiz buscada.

El cálculo de esta sustitucion, frecuentísima en la práctica del método de Newton, ó la intercalacion entre cada dos líneas del cuadro precedente de otra línea más, puede verificarse con bastante sencillez por el procedimiento que sigue.

Sábese, por la fórmula de Taylor, que

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\ldots\ldots,$$

Pues, si con las iniciales f, f', f'', ..., representamos la funcion primitiva, $f(a)$, y sus derivadas sucesivas, las otras funciones, $f(a+h)$, $f'(a+h)$, $f''(a+h)$, ..., podrán componerse de la manera que á continuacion muy compendiosa y claramente se expresa:

f				
f'	$h\,f'$			
f''	$h\,f''$	$\frac{1}{2}h^2 f''$		
f'''	$h\,f'''$	$\frac{1}{2}h^2 f'''$	$\frac{1}{6}h^3 f'''$	
f^{IV}	$h\,f^{IV}$	$\frac{1}{2}h^2 f^{IV}$	$\frac{1}{6}h^3 f^{IV}$	$\frac{1}{24}h^4 f^{IV}$
....	.....	.....	.....	.....
....	.....	.....	.....	.....

f				
$h f'$	f'			
$\frac{1}{2} h^2 f''$	$h f''$	f''		
$\frac{1}{6} h^3 f'''$	$\frac{1}{2} h^2 f'''$	$h f'''$	f'''	
$\frac{1}{24} h^4 f^{IV}$	$\frac{1}{6} h^3 f^{IV}$	$\frac{1}{2} h^2 f^{IV}$	$h f^{IV}$	f^{IV}
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
$f(a+h)$	$f'(a+h)$	$f''(a+h)$	$f'''(a+h)$	$f^{IV}(a+h)$

Apliquemos este procedimiento al cálculo de $f(0.5)$, $f'(0.5)$, $f''(0.5)$ y $f'''(0.5)$, suponiendo que a es igual á *cero*, y h igual á la fraccion decimal 0 . 5.—A las expresiones simbólicas que preceden, reemplazarán en este caso particular las que siguen:

+ 4			
— 7	— 3 . 5		
— 6	— 3 . 0	— 0 . 75	
+ 6	+ 3 . 0	+ 0 . 75	+ 0 . 125

+ 4 . 000			
— 3 . 500	— 7 . 00		
— 0 . 750	— 3 . 00	— 6 . 0	
+ 0 . 125	+ 0 . 75	+ 3 . 0	+ 6
— 0 . 125	— 9 . 25	— 3 . 0	+ 6
$f(0.5)$	$f'(0.5)$	$f''(0.5)$	$f'''(0.5)$

De lo hecho hasta aquí se infiere que la raiz x, se halla

comprendida entre 0 y 0.5; y como poniendo por x el segundo de estos valores, b, las funciones f y f'' resultan del mismo signo, al segundo valor debe referirse el cálculo de la correccion, por la regla de Newton.

En el caso actual

$$\varepsilon = \frac{(0.125)^2 \times 3}{2 \times (9.25)^3}$$

es inferior á 0.0001; y, por lo tanto, la correccion α podrá ampliarse por *defecto*, en absoluto, hasta la cuarta cifra decimal, y obtenerse así el siguiente resultado:

$$\alpha = -\frac{0.125}{9.25} = -0.0135$$

Con lo cual el valor de b_1, aproximado tambien hasta la cuarta decimal, mas por *exceso*, queda determinado como sigue:

$$b_1 = 0.5 - 0.0135 = 0.4865$$

Como ántes calculamos las funciones $f(0.5)$, $f'(0.5)$....., calculemos ahora las $f(b_1)$, $f'(b_1)$, $f''(b_1)$.....; y, para esto, en la primera parte del cuadro simbólico ó pauta general que precede, pongamos por a ó b el número 0.5; y por h la correccion obtenida -0.0135. Procediendo así, se deducen por de pronto estos resultados:

-0.125			
-9.250	$+0.124875$		
-3.000	$+0.040500$	$-0^5.273375$	
$+6.000$	-0.081000	$+0^5.546750$	$-0^5.2460375$

De los cuales se desprenden los valores de $f(b_1)$, $f'(b_1)$ y $f''(b_1)$, conforme se indica á continuacion:

-0.125		
$+0.124875$	-9.250	
-0.000273375	$+0.040500$	-3.000
-0.000002460375	$+0.00054675$	-0.081
-0.000400835375	-9.20895325	-3.081
$f(b_1)$	$f'(b_1)$	$f''(b_1)$

El segundo valor aproximado de ε se determinará con los nuevos datos por esta fórmula:

$$\varepsilon' = \frac{(0.000401)^2 \times 3.081}{2 \times (9.21)^3}$$

Y como ε' resultará inferior á $0^s.1$, el segundo valor de α podrá aproximarse, por *defecto*, hasta la novena cifra decimal inclusive, de este modo:

$$\alpha' = -\frac{0'.000400835375}{9.20895325} = -0^s.43526$$

De donde se infiere que b_2, aproximado por *exceso* hasta la misma novena cifra decimal, ó el de x_1, si con lo que precede se da por terminada la operacion, valdrán lo que á continuacion se expresa:

$$b_2 = 0.4865 - 0.000043526; \quad \text{ó}$$

$$x_1 = 0.486456474$$

2.ª—La raiz x_2 de la ecuacion propuesta se halla com-

prendida entre los números 4 y 5; y como $f(5)$ y $f''(5)$ son *positivas* ambas, y entre 4 y 5 la *derivada* $f''(5)$ no cambia de signo, la regla de Newton es aplicable desde luégo, ó sin ambigüedad ni temor de ninguna especie.—Limitémonos, pues, á presentar el cuadro de las operaciones necesarias para determinar aquella raiz.

PRIMERA CORRECCION.

$$\varepsilon = \frac{(19)^2 \times 24}{2 \times (38)^3} = \frac{6}{4 \times 19} < 0.1;$$

$$\alpha = -\frac{19}{38} = -0.5; \quad \text{y}$$

$$b_1 = 5.0 - 0.5 = 4.5$$

SEGUNDA CORRECCION.

+ 19 + 38 + 24 + 6	— 19 — 12 — 3	+ 3 + 0.75	— 0.125

+ 19 — 19 + 3 — 0.125	+ 38 — 12 + 0.75	+ 24 — 3	+ 6
+ 2.875 $f(4.5)$	+ 26.75 $f'(4.5)$	+ 21 $f''(4.5)$	+ 6 $f'''(4.5)$

$$\varepsilon = \frac{(2.875)^2 \times 21}{2 \times (26.75)^3} < 0.01;$$

$$\alpha' = -\frac{2.875}{26.75} = -0.10 \text{ (por } \textit{defecto)},$$

$$b_2 = 4.50 - 0.10 = 4.40 \text{ (por } \textit{exceso)}.$$

TERCERA CORRECCION.

2.875 26.750 21.000 6.000	 —2.675 —2.100 —0.600	 +0.105 +0.030	 —0.001

+2.875 —2.675 +0.105 —0.001	+26.75 — 2.10 + 0.03	+21.0 — 0.6	+6
+0.304 $f(4.40)$	+24.68 $f'(4.40)$	+20.4 $f''(4.40)$	+6 $f'''(4.40)$

$$\varepsilon'' = \frac{(0.304)^2 \times 20.4}{(24.68)^3} < 0.0001;$$

$$\alpha'' = -\frac{0.304}{24.68} = -0.0123 \text{ (por } \textit{defecto)}; \text{ y}$$

$$b_3 = 4.40 - 0.0123 = 4.3877 \text{ (por } \textit{exceso.)}$$

Y con este valor de b_3 coincidirá el de x_2 si limitamos la aproximacion á la cuarta cifra decimal.

3.ª—La raiz x_3 se halla comprendida entre los números -2 y -1. Y, por no variar $f''(x)$ de signo entre estos límites, y tenerle igual $f(-2)$ y $f''(-2)$, la correccion de Newton, calculable desde luégo, deberá referirse al primero de aquellos números, y calcularse segun á continuacion se indica.

PRIMERA CORRECCION.

$$\varepsilon = \frac{2^2 \times 18}{2 \times (17)^3} < 0.01;$$

$$\alpha = \frac{2}{17} = 0.11 \text{ (por } \textit{defecto)}; \quad \text{y}$$

$$a_1 = -2 + 0.11 = -1.89 \text{ (por } \textit{defecto} \text{ tambien).}$$

SEGUNDA CORRECCION.

-2 $+17$ -18 $+6$	$+1.87$ -1.98 $+0.66$	-0.1089 $+0.0363$	$+0.001331$

-2 $+1.87$ -0.1089 $+0.001331$	$+17$ -1.98 $+0.0363$	-18 $+0.66$	$+6$
-0.237569 $f(-1.89)$	$+15.0563$ $f'(-1.89)$	-17.34 $f''(-1.89)$	$+6$ $f'''(-1.89)$

$$\varepsilon' = \frac{(0.237569)^2 \times 17.34}{2 \times (15.0563)^3} < 0.001;$$

$$\alpha' = \frac{0.237569}{15.0563} = 0.015 \text{ (por } \textit{defecto)}; \quad \text{y}$$

$$a_2 = -1.89 + 0.015 = -1.875 \text{ (por } \textit{defecto} \text{ tambien).}$$

Y el valor de a_2 se adoptaría como expresion del de x_5 si la aproximacion de esta raiz se limitase á la tercera cifra decimal, ó de las milésimas.»

Hasta en un ejemplo tan sencillo como el propuesto por Bourget, ¡qué variedad de operaciones y cuán inminente y contínuo riesgo de equivocarse al verificarlas! ¡Pues qué sería si á los propuestos y resueltos en el Capítulo VII de esta Memoria se intentase aplicar el mismo procedimiento de análisis! Ni siquiera cabe imaginarlo.—En casos tales, á la regla de Newton debe siempre preceder la aplicacion del método de Gräffe y Encke; pero, como decia Lagrange, aquella famosa regla solo nos servirá entónces para resolver lo que ya está *casi resuelto:* para obtener un último grado de aproximacion, muy raras veces necesario en la práctica, y satisfacer las aspiraciones de la más exigente teoría. Limitada á este objeto, la expresada regla, ora en su forma primitiva, ya perfeccionada por Darboux, ó por cualquiera otro matemático, siempre será tenida en grande estima.

C.—*Sobre la determinacion de las raices imaginarias.*

1.—Si el procedimiento de Gräffe para determinar las raices *reales* de una ecuacion aventaja en brevedad y sencillez á todos los demas procedimientos conocidos, clásicos en cierto modo, y más comunmente empleados con igual objeto, el mismo método, ampliado y perfeccionado por Encke, es el único que, por regla general, y sin tropezar con enormes di-

ficultades de ejecucion, puede practicarse cuando de la investigacion de las raices *imaginarias* se trata.

Para hallar estas raices, tan *reales* como las con este nombre designadas, y no menos importantes, propónese en casi todos los tratados de Algebra, como preferible á cualquiera otro, el siguiente artificio, basado en la ingeniosa teoría y complicadísima práctica de la *eliminacion:* en la doctrina que ménos atractivo suele presentar cuando por vez primera se estudia aquella parte principalísima de la ciencia matemática.

En la ecuacion $f(x)=0$, se dice, póngase por x la doble expresion $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$; y nos resultará esta otra:

$$f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = \varphi(\alpha, \beta) \pm \beta\sqrt{-1} \,.\, \psi(\alpha, \beta) = 0$$

De la cual se desprenden inevitablemente estas dos:

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(\alpha) - \frac{\beta^2}{2} f''(\alpha) + \frac{\beta^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}(\alpha) - \ldots\ldots = 0; \text{ y}$$

$$\psi(\alpha, \beta) = f'(\alpha) - \frac{\beta^2}{2.3} f'''(\alpha) + \frac{\beta^4}{2.3.4.5} f^{\text{V}}(\alpha) - \ldots\ldots = 0.$$

Y los valores *reales* de α y de β, que simultáneamente satisfagan á estas dos ecuaciones, servirán para componer otros tantos pares de valores conjugados de x, *imaginarios*, y correspondientes á la ecuacion primitiva.

2.—En tan breves términos formulado, no parece que pueda haber otro método de investigacion más sencillo. Para penetrar la malicia que encierra, ó las dificultades de cálculo que le son inherentes, apliquémosle al ejemplo propuesto por Serret, en la pág. 367 del tomo I de su *Curso de Algebra superior:* ejemplo indudablemente rebuscado entre los más inocentes y sencillos: en su especie, casi pueril.

«Sea, pues, la ecuacion

$$x^4 - x + 1 = 0,$$

cuyas cuatro raices son imaginarias (*).

(*) Antes de afirmarlo, sería menester averiguarlo. Cuando la determinacion de las raices se verifica por el método de Encke, semejante investigacion preliminar es de todo punto innecesaria y excusada.

Si por x sustituimos en ella la expresion $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, nos resultarán estas otras dos:

$$(\beta^2 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2) - (4\alpha^4 + \alpha - 1) = 0; \text{ y}$$

$$\beta(4\alpha(\beta^2 - \alpha^2) + 1) = 0.$$

Prescindiendo en la segunda del factor β, dedúcese que

$$\beta^2 - \alpha^2 = -\frac{1}{4\alpha}.$$

Y, por sustitucion del valor de $\beta^2 - \alpha^2$ en la anterior, conviértese ésta en la que sigue:

$$64\alpha^6 - 16\alpha^2 - 1 = 0.$$

Ó, suponiendo que $\alpha = {}^1/_2\sqrt{\alpha_1}$, en esta otra:

$$\alpha_1^3 - 4\alpha_1 - 1 = 0.$$

Para resolver esta última ecuacion, atribuyamos á la incógnita α_1 diversos valores particulares, calculemos los correspondientes del primer miembro, y formemos el adjunto cuadro:

α_1	$\alpha_1^3 - 4\alpha_1 - 1$
2	-1
3	$+16$
2.1	-0.139
2.2	$+0.848$
2.11	-0.046069
2.12	$+0.048128$

Del cual se deduce que la *única* raiz positiva, α_1, se

halla comprendida entre los dos últimos números ensayados, 2.11 y 2.12

Corrigiendo estos valores por el método ó regla de aproximacion de Newton, hallaríamos que la misma raiz está tambien comprendida entre los números, mucho ménos discrepantes uno de otro, 2.1149 y 2.1150

Y, aplicando de nuevo el mismo procedimiento de correccion á estos últimos números, nos resultaría, aproximada la raiz hasta la 8.ª cifra decimal, que $\alpha_1 = 2.11490754$

De este valor de α_1, por la fórmula $\alpha = {}^1/_2 \sqrt{\alpha_1}$, se infiere luégo que $\alpha = \pm 0.72713603$

Y, con el doble valor de α, sustituido en la ecuacion que precede á la final, conclúyese tambien que

$$\beta = \pm 0.43001425; \quad \text{y} \quad \beta = \pm 0.93409929$$

Los cuatro valores de x, de dos en dos *conjugados*, serán, pues, éstos en conclusion:

$$x = +0.72713603 \pm 0.43001425\sqrt{-1}; \quad \text{y}$$

$$x = -0.72713603 \pm 0.93409929\sqrt{-1}.$$

3.—Así, con leves variantes de forma, se expresa Serret, en la obra y página, poco ántes, mencionadas.

Pues bien: sin admitir como demostrado por de pronto lo que no lo está todavía en realidad; sin apelar, para verificar la eliminacion, á recursos ó artificios muy ingeniosos, sí, pero que no á todo el mundo le ocurren siempre, ni es posible que muchas veces le ocurran á nadie; sin perder el tiempo en tanteos, infructuosos y arbitrarios con suma frecuencia; y hasta sin acordarse para nada del método de aproximacion de Newton,—por la simple y como rutinaria aplicacion del método *general* en la precedente Memoria explicado, en cosa de *veinte minutos*, se resolverá la ecuacion propuesta, conforme á continuacion se indica:

(2^0) $x^4 - x + 1 = 0$

(2^1) $x^4 + 2x^2 + x + 1 = 0$

(2^2) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$

(2^3) $x^4 + 4x^3 + 14x^2 - 3x + 1 = 0$

(2^4) $x^4 - 12x^3 + 222x^2 - 19x + 1 = 0$

(2^5) $x^4 - 300x^3 + 48830x^2 - 83x + 1 = 0$

(2^6) $x^4 - 7660x^3 + 2384319102x^2 - 90771x + 1 = 0.$

Y hecho esto, de la última ecuacion, transformada de la (2^0), inmediatamente se deduce que

$$2^6 \log.g_0^2 = 9.3773644; \quad \text{y} \quad g_0^2 = 1.4012685$$

$$2^6 \log.g_0^2 g_1^2 = 0.0000000; \quad \text{y} \quad g_1^2 = 0.7136391$$

Y, de la primitiva, que

$$f_0 + f_1 = 0; \quad \text{y} \quad g_0^2 f_1 + g_1^2 f_0 = -1: \text{ ó}$$

$$f_0 = -f_1 = 1.4542719$$

La ecuacion (2^0) se resuelve, en consecuencia, en las dos siguientes de *segundo grado:*

$$x^2 + 1.4542719\,x + 1.4012685 = 0; \quad \text{y}$$

$$x^2 - 1.4542719\,x + 0.7136391 = 0.$$

Cuyas raices son las mismas, poco ántes expresas, aunque aproximadas ahora, no hasta la 8.ª, sino solamente hasta la 7.ª cifra decimal. Pero hubiera bastado cambiar de tablas de logaritmos, y efectuar los anteriores cálculos con logaritmos de *ocho ó diez* cifras decimales, para obtener los valores de aquellas raices, con aproximacion á la verdad igual ó mayor que la obtenida por Serret. Lo cual ni vale casi la pena de men-

cionarse, ni en lo más mínimo invalida el mérito del segundo método de resolucion (*).

4.—Al procedimiento primero y más comun para determinar las raices imaginarias agregó Lagrange una modificacion, mucho más importante y curiosa en teoría que útil en la práctica.

Las dos ecuaciones $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ y $\psi(\alpha, \beta) = 0$ subsistirán siempre con el carácter de fundamentales; pero si á ellas se agrega la transformada de la primitiva, cuyas raices sean los *cuadrados de las diferencias* de las mismas raices que aquella ecuacion, $f(x) = 0$, contiene, los valores *reales* de β se deducirán resolviendo esta tercera ecuacion, y los de α buscando, por el procedimiento del *m. c. d.*, las raices comunes á las dos anteriores, despues de poner en ambas por β los valores que de la tercera se hubieren desprendido.

De la ecuacion de los *cuadrados de las diferencias* se deducirán los valores de β investigando los de las raices reales *negativas* que esta ecuacion contenga: porque á cada par de raices imaginarias de la primitiva, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, corresponde una diferencia igual á $2\beta\sqrt{-1}$, cuyo *cuadrado* lo es á $-4\beta^2$, raiz de la transformada. Divididos, pues, por 4 los valores absolutos de las raices negativas de esta última ecua-

---

(*) Más rápida todavía que la resolucion de la ecuacion propuesta por Serret es la de aquella otra, citada en los preliminares de esta MEMORIA, y que Catalan propone como ejemplo de los ensayos infructuosos á que puede dar motivo la aplicacion irreflexiva del método para aislar las raices, denominado de las *diferencias:* método excelente, por sí solo, para perder ó malgastar el tiempo y la paciencia muchas veces.—La ecuacion á que aludimos es la siguiente:

$$(2^0) \quad x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Cuya transformada final es ésta:

$$(2^4) \quad x^4 - 20610x^3 + 106233747x^2 - 4738x + 1 = 0.$$

De la cual, por los mismos pasos que en el texto, se concluye que la (2^0) equivale á estas otras dos ecuaciones de segundo grado:

$$x^2 + 0.6994922x + 3.1742518 = 0; \quad \text{y}$$

$$x^2 - 0.6994922x + 0.3150349 = 0.$$

cion, bastará extraer la raiz cuadrada de los cocientes respectivos para hallar los de β, que, sucesivamente, deben sustituirse en las ecuaciones $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ y $\psi(\alpha, \beta) = 0$, para concluir los de α que les corresponden.

5.—Si para hallar las raices reales de la ecuacion primitiva, $f(x)=0$, fuese menester, como Lagrange en principio suponía, formar la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de todas sus raices, indudablemente podría utilizarse la segunda ecuacion para determinar por el procedimiento referido las raices imaginarias, y completar así la solucion de la ecuacion propuesta. Pero como la formacion de la ecuacion auxiliar citada pide una *eliminacion* muy penosa de la incógnita x entre estas dos ecuaciones

$$f(x) = 0, \text{ y } f'(x) + \frac{y}{2} f''(x) + \frac{y^2}{2.3} f'''(x) + \ldots\ldots = 0,$$

en la segunda de las cuales representa la y la *diferencia* de dos valores cualesquiera de x, ó de dos raices de $f(x) = 0$, sólo en casos excepcionales muy sencillos se efectúa este trabajo preliminar, y sólo entónces podrá utilizarse la ingeniosa observacion hecha, y modificacion consiguiente en el método general, propuesta por Lagrange.

Y áun entónces habrá que proceder con cautela para determinar los verdaderos valores de β. Porque, si bien es cierto que á cada par de raices imaginarias conjugadas de la ecuacion $f(x) = 0$ corresponde en la de los cuadrados de las diferencias de sus raices una raiz real negativa, no siempre la proposicion recíproca es igualmente cierta, ó no siempre á cada raiz negativa de la segunda ecuacion corresponde un par de imaginarias en la primera. Por ejemplo: supongamos que la ecuacion $f(x) = 0$ posea, entre otras, tres raices: una real, α; y dos imaginarias, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. En la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de sus raices existirían entónces estas tres raices, reales y negativas: $-4\beta^2$, $-\beta^2$ y $-\beta^2$: de las cuales tan sólo la primera corresponde al par imaginario que se trata de determinar. Resulta, pues, que á las dificultades de formacion y resolucion de la ecua-

cion auxiliar, derivada de la primitiva, hay que agregar la de discernir cuáles son las raices negativas de la una en correspondencia clara y directa con las imaginarias de la otra. Y, por lo tanto, lo que alguna vez pudiera ser ó considerarse, como simplificacion del método general de análisis de la ecuacion propuesta, tambien pudiera alguna otra vez convertirse en causa de complicacion, ó de fastidiosa incertidumbre y de ambigüedad en los resultados obtenidos.

6.—Ingeniosa y digna de conocerse es la modificacion introducida en el método de Lagrange, para determinar las raices imaginarias de una ecuacion, por el matemático inglés W. Rutherford. Expliquémosla, valiéndonos para ello de un ejemplo muy sencillo, ó razonando en el caso ménos complicado que puede presentarse.

Consideremos, pues, la ecuacion general de tercer grado,

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0,$$

cuyas raices representaremos por r, una, y por $\alpha \pm \sqrt{-\gamma}$, las otras dos.

Si estas dos raices son imaginarias efectivamente, γ deberá considerarse como cantidad *positiva;* pero, si fuesen reales, bastaría suponer que el signo propio de γ era el *negativo.* De cualquier especie que sean, no prejuzgando nada sobre el signo de γ, siempre podrán representarse ambas raices en la forma referida.

De la ecuacion propuesta deduzcamos ahora otra, cuyas raices sean las de la primitiva, disminuidas de la cantidad α. Representando por y la nueva incógnita, la transformada de la primera ecuacion será la que sigue:

$$y^3 + (3\alpha + a) y^2 + (3\alpha^2 + 2a\alpha + b) y + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0.$$

Mas si las raices de la ecuacion propuesta supusimos ántes que eran r y $\alpha \pm \sqrt{-\gamma}$, las de su transformada deberán ser estas otras: $(r - \alpha)$ y $\pm \sqrt{-\gamma}$. Luego la segunda ecuacion equivaldrá á esta otra:

$$y^3 + (\alpha - r) y^2 + \gamma y + \gamma (\alpha - r) = 0.$$

De donde se deduce que

$$3\alpha + a = \alpha - r;$$

$$3\alpha^2 + 2a\alpha + b = \gamma; \text{ y}$$

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = \gamma(\alpha - r).$$

Ó, eliminando la γ entre las dos últimas ecuaciones de condicion, que

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + {}^1/_4(a^2 + b)\alpha + {}^4/_8(ab - c) = 0.$$

Y de esta ecuacion deduciremos el valor *real* de α; que nos servirá despues para hallar el de γ con auxilio de la segunda de las tres ecuaciones condicionales que preceden; y, finalmente, el de r, por medio de la primera. La resolucion completa de la ecuacion primitiva depende, pues, del conocimiento de una sola raiz real de la ecuacion auxiliar que se acaba de construir.

Si, por ejemplo, se nos diese la ecuacion

$$x^3 - 6x + 6 = 0$$

concluiríamos de ella inmediatamente la que sigue:

$$\alpha^3 - 1.5\alpha - 0.75 = 0$$

La cual, resuelta por el método de Gräffe, ó por cualquiera otro, arrojaría este resultado:

$$\alpha = +1.423661$$

De donde se deduce, por las fórmulas ó ecuaciones condicionales referidas, que

$$\sqrt{-\gamma} = \pm 0.283606\sqrt{-1}; \text{ y}$$

$$r = -2.847322$$

La dificultad de hallar las raices *imaginarias* de la ecua-

cion propuesta queda así reducida á la de hallar los valores de las raices *reales* de otra ecuacion, en cierto modo, derivada ó transformada de la primitiva. Pero ¿de qué grado será esta segunda ecuacion auxiliar? ¿Y cómo sus coeficientes se componen con los coeficientes de la ecuacion primitiva?—Procuremos investigarlo, avanzando un paso más por el camino ya emprendido.

7.—De la ecuacion

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0,$$

representando sus cuatro raices, reales ó imaginarias, por r_1, r_2 y $\alpha \pm \sqrt{-\gamma}$, se desprende la que sigue, cuyas raices son $(r_1 - \alpha)$, $(r_2 - \alpha)$ y $\pm\sqrt{-\gamma}$:

$$y^4 + (4\alpha + a)\, y^3 + (6\alpha^2 + 3a\alpha + b)\, y^2 +$$
$$(4\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c)\, y + (\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d) = 0.$$

Pero las mismas raices que esta ecuacion posee tambien la siguiente:

$$y^4 + (2\alpha - r_1 - r_2)\, y^3 + \{(\alpha - r_1)(\alpha - r_2) + \gamma\}\, y^2 +$$
$$(2\alpha - r_1 - r_2)\, \gamma . y + \gamma\, (\alpha - r_1)(a - r_2) = 0.$$

Luego:

$$4\alpha + a = 2\alpha - r_1 - r_2;$$
$$6\alpha^2 + 3a\alpha + b = (\alpha - r_1)(\alpha - r_2) + \gamma;$$
$$4\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c = (2\alpha - r_1 - r^2)\gamma; \quad \text{y}$$
$$\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = (\alpha - r_1)(\alpha - r_2)\gamma.$$

Estas cuatro ecuaciones de condicion con cuatro incógnitas pueden reducirse á una sola ecuacion, con una sola incógnita, que, despues de resuelta y calculada, servirá para facilitar la solucion y cálculo de las demas. Eliminando, por ejemplo, las r_1, r_2 y γ, lo cual es muy sencillo, obtiénese

para ecuacion final, ó *resolvente*, con la incógnita α, la que sigue:

$$\alpha^6+\frac{3}{2}a.\alpha^5+\frac{3a^2+2b}{4}.\alpha^4+$$

$$\frac{a(a^2+4b)}{8}.\alpha^3+\frac{a(2ab+c)+(b^2-4d)}{16}.\alpha^2+$$

$$\frac{a(b^2+ac-4d)}{32}.\alpha+\frac{abc-a^2d-c^2}{64}=0.$$

Para resolver una ecuacion de cuarto grado hay, pues, que hallar las raices *reales* de otra de sexto, cuyos coeficientes se derivan de los de la primitiva por procedimiento ó ley muy complicada. Cierto que esta ecuacion auxiliar, cuando la propuesta carece de segundo término, ó $a=0$, se simplifica mucho y hasta se reduce al tercer grado; pero, si aquella primitiva ecuacion es completa, como lo será casi siempre, ó por regla general, para privarla de su segundo término habrá que transformarla previamente en otra, y efectuar con este objeto multitud de operaciones aritméticas. Lo que en un concepto se gane, se perderá, y habrá que rescatarlo á buen precio, en otro.

Y lo que, tratándose de las ecuaciones de 4.° grado, admite todavía algun remedio, ya no le admite, ni bueno ni malo, en las ecuaciones de los grados superiores. Por el procedimiento de Rutherford, lo mismo que por el de Lagrange, con el cual coincide en muchos puntos, la resolucion completa de la ecuacion de 5.° grado depende de la determinacion de las raices reales de otra de 10°; la de 6.° grado, de otra del 15°; la de 7.° de una del 21°; y así de las demas sucesivas. ¿Y es racional semejante manera de proceder? ¿ni comparable por asomo con el propuesto por Encke, y explicado en el Capítulo III de esta Memoria?—Decídalo ahora, con pleno conocimiento del asunto, el lector imparcial y reflexivo.

C'.—*Adicion á la nota precedente. Exposicion del método de* Horner *para hallar las raices reales de una ecuacion numérica.*

1.—Para hallar la raiz *real* de la ecuacion

$$\alpha^3 - 1.5\,\alpha - 0.75 = 0,$$

de cuyo previo conocimiento depende el de las tres raices, real *una* é imaginarias las otras *dos*, de la ecuacion considerada en la pág. 236

$$x^3 - 6\,x + 6 = 0,$$

Rutherford se vale del método de Horner, que bien pudiera ser completamente desconocido de nuestros muy contados lectores, á pesar de su mérito incuestionable y de sus 60 años de fecha, si sólo con los tratados elementales de Algebra, publicados en Francia, estuvieren familiarizados. Aunque el *nuevo* método, variante ingeniosa de los más antiguos de Lagrange y de Newton, sólo sea, como estos, aplicable á la determinacion de las raices reales de una ecuacion numérica, despues de aisladas ó de separadas unas de otras estas raices, ó de saber, por resultado de minucioso trabajo de análisis previa, á cuántas ascienden en totalidad, cuántas son positivas y cuántas negativas, y entre qué límites, ó números consecutivos, ó muy poco diferentes uno de otro, se hallan distribuidas, oportuno nos parece definirle en este lugar y aplicarle á la resolucion de algun ejemplo, como complemento de lo expuesto en la anterior Memoria y adiciones que la acompañan. En Inglaterra el método de Horner es vulgarísimo; y, aunque por varios conceptos le consideremos inferior en mérito al de Gräffe, en algun caso pudiera mirarse como preferible al del matemático suizo, completado por Encke, por su sencillez teórica y eficacia notabilísima en la práctica.

En principio se reduce á lo siguiente.

2.—Dada una ecuacion numérica, $f(x) = 0$, y hallada

la primera cifra, a, de cualquiera de sus raices reales y positivas, si por x sustituimos la expresion $a+y$, hallaremos otra ecuacion, $f(a+y)=f_1(y)=0$, del mismo grado que la primitiva, y cuyas raices serán las de ésta, disminuidas en la cantidad ó número a. Y, si entre a y $a+1$ no existia en la ecuacion $f(x)=0$ más que una sola raiz, en la $f_1(y)=0$ es evidente que sólo existirá otra, comprendida entre *cero* y la unidad del órden á que la a se refiera. Sustituyendo, pues, en la segunda ecuacion los números 0.0, 0.1, 0.2, ... 0.9 y 1.0, fácil será por tanteos averiguar entre cuáles dos consecutivos se halla comprendido el valor de y; y el menor de estos números, que en absoluto designaremos por b, representará la segunda cifra del valor de x, cuya primera designamos por a..

De la ecuacion $f_1(y)=0$, poniendo por y la expresion $b+z$, deduciremos luégo otra ecuacion, $f_1(b+z)=f_2(z)=0$, del mismo grado que las dos anteriores, y cuya incógnita z debe poseer un valor exclusivo, comprendido entre 0.0 y 1 del órden b, ó 0.00 y 0.1 del a.—Ensayando, pues, los diez números 0.00, 0.01, 0.02, ..., 0.09 y 0.1, hallaremos entre cuáles dos consecutivos se halla comprendido el valor de z; y el menor de estos números, en absoluto c, representará ó nos dará la tercera cifra de x.

Y continuando así indefinidamente esta misma serie de sustituciones, transformaciones, y ensayos ó tanteos, se hallarán cuantas otras cifras de la raiz buscada se consideren necesarias.

3.—Aclaremos esta regla, antes de indicar las varias simplificaciones que admite, y que propiamente constituyen el método de Horner, por medio de un ejemplo. Y el ejemplo será el poco ántes aducido.

Del exámen de la ecuacion

$$f(x)=x^3-1.5x-0.75=0$$

inmediatamente se infiere que el valor real de x se halla comprendido entre los números 1 y 2. Pongamos, pues, por x el binomio $y+1$, y resultará que

$$f_1(y)=y^3+3y^2+1.5y-1.25=0.$$

Esta segunda ecuacion debe tener una raiz comprendida entre 0.0 y 1; y nada más que una, si es verdad que la anterior sólo contiene otra, entre los números consecutivos mencionados, 1 y 2.—Ensayando, pues, los 0.0, 0.1, 0.2, 0.3,....., se concluye que el valor de y está realmente comprendido entre 0.4 y 0.5. Luego el de x lo estará entre 1.4 y 1.5; y la cifra 4 será, en consecuencia, la segunda de la raiz principal buscada.

En la ecuacion $f_1(y)=0$ pongamos ahora por y el binomio $z+0.4$; y hallaremos que

$$f_2(z)=z^3+4.2\,z^2+4.38\,z-0.106=0.$$

Y como z, complemento del valor aproximado de y, igual á 0.4, debe hallarse comprendida entre 0.00 y 0.1, ensayando en la última ecuacion los números consecutivos 0.00, 0.01, 0.02,: ..., concluiremos por encerrar el valor de z entre los límites mucho más próximos 0.02 y 0.03.—La cifra 2 será, por lo tanto, la tercera de x.

Y del propio modo, ó por sustituciones y transformaciones análogas, deduciríamos luégo que

$$f_3(u)=u^3+4.26\,u^2+4.5492\,u-0.016712=0:$$

á cuya ecuacion corresponde un valor numérico de u, mayor que 0.003 y menor que 0.004.

Y, á continuacion tambien y como consecuencia de lo que precede, que

$$f_4(v)=v^3+4.269\,v^2+4.574787\,v-0.003026033=0:$$

de la cual se deduce para v otro valor, comprendido entre 0.0006 y 0.0007.

Limitando á esto la serie de operaciones, conclúyese, en fin, que $x=1.4236$.....

Adviértase ahora que los tres valores aproximados de z, u y v (0.02, 0.003 y 0.0006), que, en absoluto considerados, representan las tres últimas cifras de la raiz x, com-

ciden respectivamente con los cocientes, limitados á las centésimas, milésimas y diezmilésimas, de 0.106 por 4.38; 0.016712 por 4.5492; y 0.003026033 por 4.574787: últimos términos, con los signos cambiados, de las ecuaciones $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, y $f_4 = 0$, por los coeficientes que inmediatamente les preceden.

4.—Y que esto, por regla general, debe muy *aproximadamente* verificarse siempre así, fácilmente se concibe.

Pues si de la ecuacion

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots\ldots + Px^2 + Qx + R = 0,$$

por el procedimiento expuesto deducimos estas otras:

$$A_1 y^n + B_1 y^{n-1} + \ldots\ldots + P_1 y^2 + Q_1 y + R_1 = 0,$$
$$A_2 z^n + B_2 z^{n-1} + \ldots\ldots + P_2 z^2 + Q_2 z + R_2 = 0,$$
$$A_3 u^n + B_3 u^{n-1} + \ldots\ldots + P_3 u^2 + Q_3 u + R_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

desde el momento en que admitamos que las incógnitas auxiliares $y, z, u, \ldots\ldots$, representan cantidades muy pequeñas, comprendidas entre 0.0 y 1; 0.00 y 0.1; 0.000 y 0.01; ....., los términos de las ecuaciones donde respectivamente figuran elevadas al cuadrado, y potencias superiores á la segunda, podrán considerarse como despreciables; y los valores *aproximados* de las mismas incógnitas, limitados á una sola cifra, del órden inmediato inferior al de la anterior, y ya conocida, de x, se hallarán por division, casi mental, de $-R_1$, ó $-R_2$, ó $-R_3$, ... por Q_1, Q_2, Q_3 ..... Despues de todo, conforme pide la vulgarísima regla de aproximacion, propuesta por Newton.

5.—Por error material de cálculo, ó por fallar muy excepcionalmente la regla anterior, á las incógnitas $z, u, v, \ldots\ldots$, pudiéramos atribuir valores numéricos algo mayores ó menores de los que en realidad les corresponden. ¿De qué manera nos cercioraremos entónces de la equivocacion y lograremos sin demasiado esfuerzo remediarla?—Veámoslo en un ejemplo:

en el mismo de que nos hemos servido para la exposicion del método de que tratamos.

Si en la ecuacion

$$f_2(z) = z^3 + 4.2\,z^2 + 4.38\,z - 0.106 = 0,$$

suponemos que z es igual á $u + 0.03$, y no á $u + 0.02$, en vez de la poco ántes designada por $f_3(u) = 0$, hallaremos esta otra:

$$u^3 + 4.29\,u^2 + 4.6347\,u + 0.029207 = 0:$$

la cual no admite solucion *positiva*. Luego el valor hipotético de z, igual á 0.3, no admite verdadero incremento y debe considerarse como demasiado fuerte. Pero, formada ya la última ecuacion, si al cálculo de u aplicamos la regla acostumbrada ($u = -\frac{R_3}{Q_3}$), y forzamos tambien en una unidad el cociente, hallaremos que $u = -0.007$; y x, por lo tanto, igual á $+1.423\,(= 1 + y + z + u)$: lo mismo que, procediendo con mayor cautela, habíamos poco ántes encontrado. Y, si en la ecuacion anterior, por u ponemos $-0.007 + v$, recaeremos sin variante alguna en la ecuacion $f_4(v) = 0$: con lo cual el error, ó inadvertencia cometida en el cálculo de z, queda por completo remediada.

Pues suponiendo que por z se hubiese sustituido en la ecuacion $f_2(z) = 0$ la expresion $u + 0.01$, de la ecuacion entónces resultante

$$u^3 + 4.23\,u^2 + 4.4643\,u - 0.061779 = 0,$$

deduciríamos para u un valor igual ó superior á 0.01: prueba de que el de z, adoptado como bueno, es en realidad pequeño.—Con mediana práctica en el asunto, y un poco de atencion, el calculador decidirá inmediatamente lo que le conviene y debe hacer, para salvar ésta y cualquiera otra dificultad por el estilo que en el curso de las operaciones pudiera presentársele, más bien por distraccion suya que por error ó deficiencia del método.

6.—De lo hasta ahora expuesto se deduce que el cálculo de las incógnitas auxiliares, y, z, u, ..., no presenta dificultad alguna, despues de halladas las ecuaciones $f_2=0$, $f_3=0$, ..., que las contienen. Pero ¿cómo estas ecuaciones unas de otras pueden desprenderse fácilmente?

La designada por $f_1(y)=0$, igual á $f(y+a)=0$, sábese bien que equivale á esta otra:

$$f(a)+f'(a)\cdot y+f''(a)\cdot\frac{y^2}{2}+\ldots\ldots+f^n(a)\cdot\frac{y^n}{2.3\ldots\ldots n}=0.$$

Y lo mismo que la f_1 de la f, se desprenden de la f_1 la f_2, de la f_2 la f_3, y así todas las demas consecutivas.

Pero si, con arreglo á la ley en la expresion anterior formulada, hubieran de construirse sucesivamente las diversas funciones, f_1, f_2, f_3 ....., el procedimiento de Horner, para hallar los valores de las raices reales de $f(x)=0$, sería por extremo largo y penoso, y de muy menguada utilidad en la práctica. El arte consiste en pasar de una ecuacion auxiliar á otra, de la primera á la segunda, ó de la octava á la novena, sin esfuerzo de atencion, ó de un modo rutinario y casi mecánico, mediante una serie de operaciones numéricas muy sencillas, y constantemente las mismas.

7.—Para explicar y comprender cómo puede ser esto así, supongamos que

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n.$$

Si por x ponemos en esta expresion el binomio $a+y$, nos resultará que

$$f(a+y)=q_1y^n+q_1y^{n-1}+q_2y^{n-2}+\ldots\ldots+q_{n-1}y+q_n.$$

Y si deshacemos lo hecho, poniendo en esta segunda ecuacion por y su igual $x-a$, hallaremos que tambien

$$f(x)=q_0(x-a)^n+q_1(x-a)^{n-1}+q_2(x-a)^{n-2}+\ldots\ldots+$$
$$q_{n-2}(x-a)^2+q_{n-1}(x-a)+q_n.$$

Los coeficientes $p_0, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ son dados ó conocidos

en cada caso particular; y los $q_0, q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ designan los que necesitamos conocer ó determinar, en funcion de los primeros, para pasar inmediatamente de la ecuacion primitiva, $f(x)=0$. á su transformada $f(a+y)=f_1(y)=0$.

Pues del exámen de la última ecuacion sin dificultad alguna se concluye: que el coeficiente q_n representa el resíduo de la division de $f(x)$ por $x-a$; el q_{n-1} el resíduo de la division del cociente entero, que al q_n corresponde, por $x-a$ parecidamente; el q_{n-2} el resíduo tambien de la division del segundo cociente entero por el mismo divisor constante $x-a$; y así todos los demás coeficientes q, hasta llegar retrogradando al primero q_0.

¿Y cuáles son, en funcion de los coeficientes conocidos, p, el primer cociente entero y el primer resíduo de la division de $f(x)$ por $x-a$?—Los que siguen.

Cociente:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
p_0 x^{n-1} + p_0 a & x^{n-2} + p_0 a^2 & x^{n-3} + \ldots\ldots + p_0 a^{n-2} & x + p_0 a^{n-1} \\
\quad\quad + p_1 & \quad\quad + p_1 a & \quad\quad\quad\quad + p_1 a^{n-3} & \quad\quad + p_1 a^{n-2} \\
 & \quad\quad + p_2 & \quad\quad\quad\quad + p_2 a^{n-4} & \quad\quad + p_2 a^{n-3} \\
 & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
 & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
 & & \quad\quad + p_{n-2} & \quad\quad + p_{n-2} a \\
 & & & \quad\quad + p_{n-1}
\end{array}$$

Resíduo:

$$p_0 a^n + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} a + p_n = q_n.$$

Expresiones de cuyo exámen se deduce: que el resíduo es igual al último término del cociente, multiplicado por a, más el último término, p_n, de $f(x)$; que un coeficiente cualquiera del cociente, desde el segundo inclusive en adelante, se desprende del anterior por la misma ó análoga regla que el resíduo del último; y que el coeficiente del primer término

coincide con el del primero de la funcion ó polinomio propuesto. La manera de hallar el valor de q_n, por multiplicaciones y adiciones sucesivas, y por regla general muy sencillas, queda con esto explicada; y como, á la par que el primer resíduo de la division de $f(x)$ por $x-a$, se habrá encontrado el cociente entero que le corresponde, repitiendo con este cociente las mismas operaciones que se hicieron con la funcion de donde procede, se hallarán el segundo resíduo, ó valor de q_{n-1}, y el nuevo cociente que ha de servirnos de base para encontrar por el mismo camino los demas cocientes y resíduos consecutivos.

8.—Sirva de ejemplo aclaratorio de cuanto se acaba de exponer, el siguiente:

$$f(x)=5x^4-3x^2-7.$$

Si por x ponemos en esta expresion el binomio $y+3$, resultará otra de la forma

$$f_1(y)=q_0y^4+q_1y^3+q_2y^2+q_3y+q_4.$$

Y para hallar el valor de q_4 (resíduo de la division de $f(x)$ por $x-3$) habrá que efectuar las siguientes operaciones:

$$p_0=5=p'_0$$

$$p_0a+p_1=5\times3+0=15=p'_1$$

$$(p_0a+p_1)a+p_2=15\times3-3=42=p'_2$$

$$(p_0a^2+p_1a+p_2)a+p_3=42\times3+0=126=p'_3$$

$$(p_0a^3+p_1a^2+p_2a+p_2)a+p_4=126\times3-7=371=q_4.$$

El cociente entero de esta primera division es igual á

$$5x^3+15x^2+42x+126.$$

Y el resíduo de su division por $x-3$, ó el valor de q_5, se hallará análogamente de este modo:

$$p'_0 = 5 = p''_0$$

$$p'_0 a + p'_1 = 5 \times 3 + 15 = 30 = p''_1$$

$$(p'_0 a + p'_1) a + p'_2 = 30 \times 3 + 42 = 132 = p''_2$$

$$(p'_0 a^2 + p'_1 a + p'_2) a + p'_3 = 132 \times 3 + 126 = 522 = q_3.$$

Al resíduo q_3 corresponde el cociente entero

$$5 x_2 + 30 x + 132;$$

del cual se desprende el resíduo q_2, de su division por $x-3$, por resultado de las siguientes sencillísimas operaciones.

$$p''_0 = 5 = p'''_0$$

$$p''_0 a + p''_1 = 5 \times 3 + 30 = 45 = p'''_1$$

$$(p''_0 a + p''_1) a + p''_2 = 45 \times 3 + 132 = 267 = q_2.$$

Á este último resíduo acompaña el cociente entero

$$5 x + 45;$$

que, dividido por $x-3$, dará de resíduo, q_1, el número 60, segun á continuacion se indica:

$$p'''_0 = 5$$

$$p'''_0 a + p'''_1 = 5 \times 3 + 45 = 60 = q_1.$$

Y el último resíduo, ó valor de q_0, será el coeficiente 5, que se reproduce en todas las divisiones consecutivas.

Luego

$$f_1(y) = 5 y^4 + 60 y^3 + 267 y^2 + 522 y + 371.$$

9.—Esto, que tal vez parezca largo y complicado todavía, resulta en realidad muy sencillo disponiendo las operaciones del siguiente sistemático modo:

(*A*)	5	+ 0	— 3	+ 0	— 7
		+15	+45	+126	+378
(*B*)	5	+15	+42	+126	(+371)
		+15	+90	+396	
(*C*)	5	+30	+132	(+522)	
		+15	+135		
(*D*)	5	+45	(+267)		
		+15			
(*E*)	(5)	(+60)			

En la línea horizontal (*A*) se han escrito los coeficientes de $f(x)$, considerada esta funcion como polinomio completo.

Debajo del segundo coeficiente hemos puesto el producto del primero por 3; y debajo, en la línea (*B*), la suma de este producto y de aquel segundo coeficiente.

Debajo del tercero figura el producto de la suma anterior, 15, por 3; y debajo la suma de este producto y del coeficiente á que se refiere.

Debajo del cuarto el producto de la suma anterior, 42, por 3; y debajo la suma análoga á las dos anteriores.

Y debajo del quinto el producto de la última suma, 126, por 3; y debajo, y entre paréntesis, la suma de este producto y del último coeficiente: suma igual al resíduo q_4, y con la cual no hay ya ninguna otra operacion que verificar.

De la línea horizontal (*B*), completada á la izquierda con el coeficiente 5, y en la cual debe considerarse como suprimido el término entre paréntesis de la derecha, se pasa á la (*C*) como de la (*A*) se pasó á la (*B*). Y de la (*C*) se desprende la (*D*), y de ésta la (*E*), repitiendo las operaciones elementales, prolijamente enumeradas y explicadas en el caso

primero.—Todo ello es tan rudimentario y fácil de aprender, y de tan perfecta monotonía, como cualquier regla fundamental de la Aritmética.

10.—Volvamos á considerar la ecuacion

$$f(x) = x^3 - 1.5\,x - 0.75 = 0,$$

cuya raiz real única se halla comprendida entre los números 1 y 2; y veamos cómo por el procedimiento anterior pueden deducirse sus transformadas sucesivas, funciones de $y, z, u, \ldots\ldots$, ántes ya consignadas.

Para pasar de la funcion $f(x)$ á la $f_1(y)$, hay que hallar, por de pronto, los resíduos de $f(x)$ por $x - 1$; y los resíduos análogos, luégo, por el mismo divisor de cuantos cocientes enteros se fueren sucesivamente encontrando. Por la regla anterior, las operaciones que esto pide se hallan comprendidas en el estadito adjunto:

(*A*)	1	+0	—1.5	—0.75
		+1	+1	—0.5
(*B*)	1	+1	—0.5	(—1.25)
		+1	+2	
(*C*)	1	+2	(+1.5)	
		+1		
(*D*)	(1)	(+3)		

$$f_1(y) = y^3 + 3\,y^2 + 1.5\,y - 1.25 = 0.$$

Despues de averiguar, por tanteo, que esta ecuacion tiene una raiz comprendida entre 0.4 y 0.5, se hallará la siguiente, simbólicamente representada por $f_2(z) = 0$, de este modo análogo, ó, en la forma, idéntico al anterior:

(A)	1	+3	+1.5	—1.25
		+0.4	+1.36	+1.144
(B)	1	+3.4	+2.86	(—0.106)
		+0.4	+1.52	
(C)	1	+3.8	(+4.38)	
		+0.4		
(D)	(1)	(+4.2)		

$$f_2(z) = z^3 + 4.2\,z^2 + 4.38 - 0.106 = 0.$$

El valor de z se halla en esta ecuacion comprendido entre 0.02 y 0.03 (cociente de $+0.106$ por 4.38); y, por lo tanto, para pasar á la siguiente, $f_3(u) = 0$, habrá que efectuar las operaciones, siempre arregladas á la pauta de las precedentes, que á continuacion se indican.

1	+4.2	+4.38	—0.106
	+0.02	+0.0844	+0.089288
1	+4.22	+4.4644	(—0.016712)
	+0.02	+0.0848	
1	+4.24	(+4.5492)	
	+0.02		
(1)	(+4.26)		

$$f_3(u) = u^3 + 4.26\,u^2 + 4.5492\,u - 0.016712 = 0.$$

Y así podría continuarse indefinidamente, aplicando la

misma regla á la formacion de las diversas ecuaciones transformadas de la primitiva, hasta donde se creyese necesario prolongar la serie de operaciones indicadas.

11.—En la práctica el uso de los coeficientes, compuestos de gran número de cifras decimales, no es demasiado conveniente, y se evita, sin aumento de trabajo ni complicacion de ningun género, apelando á un recurso muy conocido y sencillo.

La ecuacion $f_1(y)=0$, en el supuesto de que la $f(x)=0$ sólo contenga una raiz real, comprendida entre los números a y $a+1$, debe contener otra, entre 0.0 y 1.0.—Pero si el segundo de sus coeficientes le multiplicamos por 10; el tercero por 100; por 1000 el cuarto; y así análoga y respectivamente los demas consecutivos, la nueva ecuacion resultante poseerá una raiz décupla de la $f_1=0$ primitiva; y, por lo tanto, contenida entre 0 y 10.

En el caso particular propuesto la ecuacion $f_1=0$, modificada, es la siguiente:

$$y^3+30y^2+150y-1250=0;$$

y en ella los ensayos ó tanteos necesarios para determinar los dos números consecutivos entre los cuales su raiz debe hallarse contenida se harán con los enteros 0, 1, 2..... hasta 9. Y el número inferior á su raiz expresará la segunda cifra del valor buscado de x.

Hallado este número, 4, á la transformada siguiente de $f(x)=0$, funcion de z, se pasará mediante las operaciones sencillísimas, con números enteros, que á continuacion se expresan:

1	+30	+150	—1250
	+ 4	+136	+1144
	+34	+286	(— 106)
	+ 4	+152	
	+38	(+438)	
	+ 4		
	(+42)		

Y aunque la ecuacion en z, con una raiz real comprendida entre 0.0 y 1.0, sea, en rigor, ésta:

$$z^3 + 42\,z^2 + 438\,z - 106 = 0,$$

prefiérese á ella la que sigue, de *raiz décupla:*

$$z^3 + 420\,z^2 + 43800\,z - 106000 = 0.$$

A la $f_3(u) = 0$, anteriormente deducida, ó á la que de la última ecuacion, funcion de z, podría deducirse, se sustituye, mentalmente casi, esta otra:

$$u^3 + 4260\,u^2 + 4549200\,u - 16712000 = 0;$$

la cual, como las precedentes de donde se ha derivado, debe contener una raiz comprendida entre 0 y 10: cuarta cifra del valor de x, prescindiendo del órden decimal á que pertenezca, muy fácil siempre de precisar.

Y de la última ecuacion, en fin, se desprenderían por el mismo método expuesto estas otras dos, necesarias para el cálculo de las cifras 5.ª y 6.ª de x, por division de sus últimos términos, tomados con signos contrarios, por los coeficientes de los que inmediatamente les preceden:

$$v^3 + 42690\,v^2 + 457478700\,v - 3026033000 = 0; \text{ y}$$

$$w^3 + 427080\,w^2 + 45799108800\,w - 279623744000 = 0.$$

12.—Los coeficientes de estas varias ecuaciones van sucesiva y muy rápidamente creciendo, hasta el punto de hacerse embarazoso su manejo, ó de complicarse cada vez más las operaciones numéricas que con ellos deben verificarse: lo cual limita ó dificulta la aplicacion del método de Horner, ó se opone en la práctica á la investigacion como indefinida de las raices incógnitas de la ecuacion propuesta. Llegados, sin embargo, á cierto punto, la operacion comenzada puede terminarse, ó pasando súbitamente del método de Horner al de

Newton, y hallando por una sola division otras tantas cifras casi de la raiz, como ya una en pos de otra, sucesiva y paulatinamente, se hubiesen encontrado; ó prolongando un poco más la aplicacion simplificada, ó abreviada, del primer método, ántes de recaer en el segundo. Expliquemos cómo esto puede verificarse, con pequeño incremento de trabajo sobre el ya efectuado desde un principio, en el mismo ejemplo á que en los párrafos anteriores nos hemos referido.

13.—De la ecuacion $f_4(v) = 0$ se ha concluido que v se halla comprendida entre los números 6 y 7; y, poniendo en ella por v la expresion $6 + w$, y multiplicando por 10 las raices de la ecuacion así resultante, se desprende la $f_5(w)=0$, apropiada al cálculo de w. Pero esta misma ecuacion, $f_5(w)=0$, obtenida por escalones, operando del modo sistemático referido sobre las ecuaciones análogas anteriores, se hubiera podido obtener tambien desde luégo, comenzando por transformar la $f(x)$ en otra, $F(x_1)=0$, cuyas raices fueran 100000 veces mayores que las buscadas, y sustituyendo despues en ella por x_1 el binomio $142360 + w$. Luego su último término coincidirá con el valor de $F(a)$, en la fórmula de aproximacion newtoniana, y el coeficiente anterior con el de $F'(a)$, si en la ecuacion $F(x_1) = 0$, y en el polinomio derivado $F'(x_1)$ se pone por x_1 su valor aproximado a, igual á 142360. La correccion w se deducirá, en consecuencia, por la mencionada fórmula, $w = \frac{-F(a)}{F'(a)}$, prolongando la division hasta la segunda ó tercera cifra decimal del cociente, en este caso. Y con incertidumbre muy pequeña, aunque por de pronto inevitable, en la última cifra decimal, se hallará de este modo que

$$x_1 = 142366.105; \text{ ó } x = 1.42366105 \ldots..$$

14.—Pero en vez de reemplazar arrebatadamente la ecuacion $f_5(w) = 0$, ó

$$w^5 + 427080\, w^2 + 45799108800\, w - 279623744000 = 0,$$

por la

$$+ 45799108800\, w - 279623744000 = 0,$$

compuesta de sus dos últimos términos, considerando para ello como evanescentes los anteriores, conforme pide la aplicacion del método de Newton, y hemos ahora practicado para deducir el valor de w, hubiéramos podido proceder con alguna mayor lentitud y cautela, comenzando por omitir ó tildar, en el concepto referido, tan sólo el primer término. Y si, hecho esto, reemplazamos por tres ceros las tres últimas cifras de los coeficientes restantes, con la precaucion de forzar en una unidad la cuarta, cuando la tercera sea igual ó superior al número 5, y dividimos por 1000 el resultado, á la ecuacion $f_3(w) = 0$ habremos sustituido esta otra, mucho más sencilla:

$$427\, w_1^2 + 45799109\, w_1 - 279623744 = 0;$$

de la cual se deducirá para w_1 un valor igual casi al de w: idéntico, si nos atenemos á su primera cifra, sexta del valor buscado de x.

A la última ecuacion, cuya raiz w_1, necesariamente inferior á 10, se halla comprendida entre los números 6 y 7, apliquemos de nuevo, y sin variante alguna, el procedimiento de transformacion de Horner, poniendo en ella por w_1 el binomio $w_2 + 6$, y decuplando luego las raices del resultado; y hallaremos por de pronto que

$$427\, w_2^2 + 458042330\, w_2 - 481371800 = 0.$$

Ó, reemplazando por ceros las dos últimas cifras de los tres coeficientes, que

$$4\, w_3^2 + 4580423\, w_2 - 4813718 = 0.$$

El valor de w_3, que puede tambien considerarse como igual al de w_2, se halla comprendido entre los números 1 y 2. Luego, poniendo en la última ecuacion por w_3 el binomio $w_4 + 1$, y decuplando despues el valor de w_4, nos resultará esta otra:

$$4\, w_4^2 + 45804310\, w_4 - 23329100 = 0.$$

Y de esta ecuacion, suprimiendo las dos últimas cifras de los coeficientes, lo cual implica la supresion completa de su primer término, se infiere la que sigue:

$$+458043\,w_5 - 233291 = 0.$$

De la cual, por division abreviada de sus coeficientes, se deduce finalmente que $w_5 = 0{,}50932$.

El valor de la incógnita x, cuya primera cifra se determinó por tanteo; las cuatro siguientes, hasta la v inclusive, aplicando el método de Horner, sin abreviacion ó simplificacion alguna; las otras dos, w_4 y w_3, por el mismo método abreviado; y las seis últimas, w_5, por division de un número por otro, es en conclusion el siguiente, aproximado hasta la duodécima cifra decimal en este caso:

$$x = 1.423661050932.....$$

15.—Á las ecuaciones de grado superior al *tercero* el método de Horner se aplica del mismo modo que á éstas, en el ejemplo acabado de resolver, y con simplificaciones análogas. Despues de obtenidas unas cuantas cifras de la raiz buscada, y cuando los coeficientes de la última ecuacion, transformada de la primitiva, se hubiesen complicado, ó crecido en demasía, se tachará *una* cifra en el penúltimo, *dos* en el anterior á éste, *tres* en el precedente inmediato, y así en todos los demás colocados delante, ó á la izquierda, hasta el primero inclusive. Por efecto de esta supresion de cifras, sistemáticamente repetida, llegará un momento en que desaparecerán los términos primero y segundo; el tercero luégo; y el cuarto, y el quinto, y los demas consecutivos, poco á poco. Y cuando solo subsistan los dos últimos, la operacion se terminará por la regla de Newton: dividiendo el posterior, tomado con signo contrario, por el precedente, de la manera y hasta el punto referidos.

16.—Sirva, por si todavía fuese necesario, para ilustrar la doctrina en las precedentes últimas líneas condensada, el

siguiente nuevo ejemplo, algo más complicado que el en los anteriores párrafos propuesto y resuelto.

Si se nos diese la ecuacion

$$x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 150x - 89 = 0,$$

comenzaríamos por averiguar, por las reglas ordinarias del Álgebra, ó aplicando previamente á su análisis el teorema de Sturm, que sus cuatro raices son *reales: positivas* tres, y una *negativa;* y que la mayor de las tres se halla comprendida entre los números 9 y 8, y entre los 1 y 2 las dos menores; y la negativa entre — 8 y — 9. Y esto averiguado por cualquier medio, emprenderíamos la investigacion de la primera raiz poniendo en la ecuacion que se trata de resolver por x el binomio $x_1 + 7$. Previas las operaciones numéricas sencillísimas que á continuacion se indican, y que minuciosamente se explicaron en los párrafos 8 y 9,

1	— 2	— 61	+150	— 89
	+ 7	+ 35	—182	—224
1	+ 5	— 26	— 32	(—313)
	+ 7	+ 84	+406	
1	+12	+ 58	(+374)	
	+ 7	+133		
1	+19	(+191)		
	+ 7			
1	(+26),			

y *decuplando* las raices de la transformada, se hallará el resultado siguiente:

$$x_1^4 + 260x_1^3 + 19100x_1^2 + 374000x_1 - 3130000 = 0.$$

Mediante algunos tanteos muy sencillos, de esta ecuacion se deduce que el valor de x_1 se encuentra comprendido entre los números 6 y 7. Si, pues, x_1 se supone igual á x_2+7 en la primera transformada de la ecuacion propuesta, encontraremos esta segunda, despues de decupladas sus raices:

$$x_2^4 + 2840\, x_2^3 + 2399600\, x_2^2 + 632144000\, x_2 - 1409440000 = 0.$$

Y, por division mental de su último término por el coeficiente del anterior, y cambio del signo, inferiremos en el acto que el valor de x_2 supera al número 2 y es inferior al 3. Poniendo, en consecuencia, por x_2 el binomio x_3+2, y decuplando asimismo las raices de la nueva transformada, nos resultará que

$$x_3^4 + 28480\, x_3^3 + 241666400\, x_3^2 + 641776512000\, x_3 - 1355308640000 = 0.$$

Y del exámen de esta ecuacion se deduce, á primera vista casi, que el valor de x_3 se halla tambien comprendido entre los números 2 y 3. Luego, poniendo por x_3 el binomio x_4+2, y prescindiendo de los ceros necesarios para decuplar las raices de la nueva ecuacion resultante, inferiremos, por el mismo procedimiento de transformacion aplicado en los casos anteriores, que

$$x_4^4 + 28488\, x_4^3 + 241837304\, x_4^2 + 642743519392\, x_4 - 70788722544 = 0.$$

Con todo lo cual habremos determinado las cuatro primeras cifras de la raiz buscada ($x = 7.622$ .....); á las cuales fácil sería, dividiendo el último término, con el signo cambiado, por el coeficiente del anterior, agregar de golpe otras cuatro.

Pero si, en este punto de la operacion, en vez de posponer un cero al coeficiente del segundo término de la ecuacion,

cuya incógnita es la x_4; y dos, tres y cuatro ceros, respectivamente, á los consecutivos; suprimimos una cifra á la derecha del penúltimo término, dos á la del inmediato anterior, y tres á la del que á éste precede, y tachamos ademas el primero, obtendremos esta otra ecuacion, abreviada de la que debíamos realmente resolver:

$$28\,x_4^3 + 2418373\,x_4^2 + 64274351939\,x_4 - 70788722544 = 0.$$

De la cual se deduce por de pronto que x_4 se halla comprendida entre los números 1 y 2. Y poniendo luégo por x_4 el binomio $x_5 + 1$, y verificando análogas supresiones de cifras, en el resultado inmediato de la sustitucion, á las efectuadas en el caso precedente, que

$$+ 24185\,x_5^2 + 6427918877\,x_5 - 6511952204 = 0.$$

De esta ecuacion, cuya raiz x_5 se halla comprendida entre los números 1 y 2, se pasa por los trámites expuestos á la que sigue, sustituyendo en ella por x_5 el binomio $x_6 + 1$:

$$+ 242\,x_6^2 + 642796725\,x_6 - 84009142 = 0.$$

Y como el valor de x_6 es inferior á la unidad, suponiéndole igual á $x_7 + 0$, sin cálculo alguno se deduce inmediatamente que

$$2\,x_7^2 + 64279672\,x_7 - 84009142 = 0.$$

Entre los números 1 y 2 se advierte que el valor de x_7 se encuentra comprendido. Y, por lo tanto, si en vez de x_7 sustituimos en la última ecuacion el binomio $x_8 + 1$, concluiremos que

$$+ 64279676\,x_8 - 19729468 = 0.$$

De donde, por division abreviada, se desprende con suma

rapidez que $x_8 = 0.3069317$, con incertidumbre de alguna unidad, en la última cifra.

El valor buscado de x será, pues, el que sigue:

$$x = +7.622\,110\,130\,693\,17 \ldots\ldots$$

Y si, para comprobar su exactitud ó grado de aproximacion á la verdad, determinamos por el mismo procedimiento, y con independencia los unos de los otros, los valores de las otras tres raices de la ecuacion propuesta, hallaremos parecidamente que

$$\begin{aligned} x = &+1.390\,179\,663\,422\,28 \ldots\ldots \\ &+1.042\,741\,427\,124\,49 \ldots\ldots \\ &-8.055\,031\,221\,239\,94 \ldots\ldots \end{aligned}$$

La suma de los cuatro valores así encontrados es igual y de signo contrario al coeficiente del segundo término de la ecuacion propuesta: lo cual puede considerarse, si no como prueba irrefutable, como indicio suficiente de que en el curso de las operaciones numéricas, verificadas para obtenerlos, no se ha deslizado error alguno de cuantía.

17.—La investigacion de las dos raices positivas de la ecuacion

$$x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 150x - 89 = 0,$$

comprendidas ambas entre los números enteros consecutivos 1 y 2, exige de parte del calculador una precaucion, tan sencilla como importante, no advertida todavía, y concerniente á la distincion ó separacion de aquellas raices.

Poniendo, en efecto, en la ecuacion de que se trata por la incógnita x el binomio $x_1 + 1$, despréndese desde luego la siguiente transformada suya:

$$x_1^4 + 20x_1^3 - 6100x_1^2 + 26000x_1 - 10000 = 0.$$

Y ¿es en este caso evidente que la nueva ecuacion sólo

puede contener *una* raiz real y positiva, inferior al número 10, como en el §. 11, consecuencia del §. 2, se supuso?—De ningun modo. Si los dos valores de x, comprendidos entre los números 1 y 2, no discrepan uno de otro ni en una décima parte de la unidad, los de x_1, que deben servir para completarlos, limitados en su expresion numérica á una sola cifra, serán absolutamente iguales; y la ecuacion de donde procedan sólo admitirá una raiz comprendida entre 0 y 10. Pero, si la discrepancia fuese mayor, como en este caso sucede, los de x_1 diferirán en más de una unidad, y la ecuacion que ha de servirnos para determinarlos, admitirá dos raices distintas, hasta por sus primeras cifras, comprendidas ambas entre los límites referidos. En la duda, pues, y miéntras la separacion de los valores de x no se hubiese efectuado por completo, habrá que sustituir en las transformadas sucesivas de la ecuacion propuesta los números consecutivos 0, 1, 2 ..... 10, para deducir, por los cambios de signo de los resultados, la posicion y valores de las raices auxiliares, x_1, ó x_2, ó x_3, ..., necesarios para componer los de la incógnita principal x.—Procediendo con esta precaucion, hállase, en el ejemplo de que ahora se trata, que la incógnita auxiliar ó complementaria x_1 admite dos valores: uno, comprendido entre cero y la unidad; y otro, entre los números 3 y 4. Luego los valores de x lo estarán entre 1.0 y 1.1; y entre 1.3 y 1.4. Y si, esto averiguado, ponemos en la primera transformada por x_1 el binomio $x_2 + 0$, hallaremos la siguiente, apropiada á la determinacion exclusiva de la raiz menor:

$$x_2^4 + 200\,x_2^3 - 610000\,x_2^2 + 26000000\,x_2 - 100000000 = 0;$$

ó esta otra, que se referirá á la segunda raiz, si el binomio $x_2 + 3$:

$$x_2^4 + 320\,x_2^3 - 586600\,x_2^2 - 9952000\,x_2 + 137210000 = 0.$$

La primera de las cuales sólo admite ya una raiz positiva, inferior á 10, comprendida entre los números 4 y 5; y otra, poco mayor que 9, la segunda. Y, en consecuencia, la deter-

minacion sucesiva de las demas cifras de ambas raices, por el método de Horner, no presenta desde este momento dificultad teórica de ningun género.

En suma: miéntras las raices *casi iguales* de la ecuacion propuesta no comiencen á separarse ó deslindarse unas de otras, las ecuaciones transformadas suyas sucesivas, cuyas incógnitas son la x_1, ó la x_2, ..., admitirán una sola raiz, inferior á 10, comun á todas aquellas raices, y fácil de precisar por tanteo. Pero, tan pronto como en una transformada se adviertan dos cambios de signo, producidos por la sustitucion en ella de los números 0, 1, 2 ..... 10, la separacion de las raices en dos distintos grupos queda efectuada; y el cálculo ulterior de las unas se verificará con independencia completa del de las demas. El principio es general; y, aplicado con discernimiento y constancia, producirá indefectiblemente la separacion de todas las raices que entre sí discrepen en cantidad algo mayor del límite de aproximacion á la verdad que nos hayamos propuesto obtener.

18.—En este carácter importante, como en otros varios, el método de Horner concuerda á la letra con el mucho más antiguo de Lagrange.

Recordemos, en efecto, que este celebérrimo matemático propuso, para determinar el valor de una raiz de la ecuacion $f(x) = 0$, comprendida entre los números a y $a+1$, sustituir por de pronto á la incógnita x el binomio $a + \frac{1}{y}$; y en la transformada, $f(a + \frac{1}{y}) = \varphi_1(y) = 0$, hallar luégo por tanteo el *único* valor positivo de y que debe satisfacerla: ó, procediendo por partes, los dos números enteros consecutivos entre los cuales la y estuviese comprendida. Encontrados estos números, b y $b+1$, en la ecuacion $\varphi_1(y) = 0$ prescribió poner por y el binomio $b + \frac{1}{z}$; y en la segunda transformada, $\varphi_1(b + \frac{1}{z}) = \varphi_2(z) = 0$, determinar parecidamente los dos números, c y $c+1$, que limitan el valor po-

sitivo, *único* tambien, de z. Y, por resultado de esta serie de operaciones, sencillísimas en teoría, prolongada hasta donde fuere ó se juzgare necesario, es claro que se concluirá por hallar el valor de x, expresado en *fraccion contínua*, y no *decimal*, como siguiendo el método de Horner.

Pero todo esto es en la hipótesis de que la ecuacion que tratamos de resolver contenga *una sola* raiz, entre a y $a+1$. Porque, si contuviese *dos*, alguna de las transformadas sucesivas, $\varphi_1(y)=0$, ó $\varphi_2(z)=0$, ó $\varphi_3(u)=0$, ... deberia contener otras dos; y, en la duda de cuál será la que las contenga, habrá que proceder al análisis de todas muy cuidadosamente, hasta dar con aquella donde el deslinde de las raices buscadas se efectúa, ó comienza á verificarse.

19.—Pero, aunque segun lo acabado de exponer, discrepen poquísimo en teoría los procedimientos de Lagrange y de Horner, no sucede lo mismo en la práctica. Porque en el de Lagrange el valor de una incógnita auxiliar cualquiera, y, z, u, ..., puede ser grande ó pequeño, y no hay regla segura, ni expedita, que sirva para determinarle: mientras que, con arreglo á los preceptos del matemático inglés, ya se ha visto en los anteriores párrafos cuán sencilla y acertadamente se determina. Ni en brevedad, ni en precision, ni en ningun otro concepto, aventajan al de Horner, que resume cuantas ventajas ofrecen los de sus célebres antecesores, el método de Newton, ineficaz hasta que ya la ecuacion está casi resuelta, ni el de Lagrange, muy trabajoso, y de lentitud desesperadora con frecuencia. El lector puede convencerse de ello fácilmente aplicando los tres métodos á la resolucion de la vulgarísima ecuacion siguiente, de las ménos complicadas que pueden proponerse:

$$x^3-7x+7=0.$$

Por el de Horner, en cosa de dos á tres horas de tiempo, y con trabajo casi mecánico é irreflexivo, se hallarán, con independencia unos de otros, los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} x = &+1.356\,895\,867\,892\,209\,439\,\ldots\ldots \\ &+1.692\,021\,471\,630\,095\,875\,\ldots\ldots \\ &-3.048\,917\,339\,522\,305\,314\,\ldots\ldots \end{aligned}$$

Las simplificaciones del método no deben comenzar á introducirse hasta despues de encontrar, sin abreviacion alguna en el cálculo, las seis ó siete primeras cifras decimales de las tres raices. Las cifras que siguen se desprenderán luégo muy sencilla y rápidamente, conformándose con los preceptos anteriormente explicados, y en el §. 15 resumidos.

ÍNDICE.

Págs.

PRELIMINARES 5
CAPÍTULO I.—Resolucion de la ecuacion numérica del grado *n*, cuyas *n* raices son reales y desiguales..... 19
§. 1.º—Enunciado de la cuestion 19
§. 2.º—Principio fundamental del método..... 21
§. 3.º—Cómo de la ecuacion propuesta puede concluirse otra, cuyas raices sean los cuadrados de las que se buscan..... 24
§. 4.º—Resultado final de la transformacion explicada en el párrafo anterior, multitud de veces repetida..... 27
§. 5.º—Más detalles y aclaraciones sobre el asunto del párrafo que antecede..... 29
§. 6.º—Práctica del método.—Advertencias que se deben tener presentes en el cálculo de las raices de una ecuacion 33
§. 7.º—Regla de Newton para corregir los valores aproximados de las raices, ya deducidos por el método de Gräffe..... 34
§. 8.º—Aplicacion de todo lo expuesto á la resolucion de varios ejemplos 37
§. 9.º—Carácter y trascendencia del método explicado.—Aplícase tambien á la investigacion de las raices iguales. 45
CAPÍTULO II.—Determinacion de los módulos de las raices imaginarias, cuando la ecuacion sólo contiene raices de esta especie..... 51
§. 10.—Definicion del nuevo problema 51
§. 11.—Composicion y análisis de la ecuacion del grado $2n$, cuyas raices son todas imaginarias..... 53
§. 12.—Transformacion de la ecuacion propuesta en otra cuyas raices sean las potencias *m* de las raices incógnitas.—Cálculo de los módulos..... 57
§. 13.—Dificultad de resolver por completo, y en general,

Págs.

la ecuacion del grado 2 *n*.—Advertencias útiles para la resolucion de las ecuaciones de cuarto y sexto grados... 61
§. 14.—Regla de Newton para corregir los valores aproximados de los módulos, y áun de las mismas raices imaginarias, ya por cualquier procedimiento deducidos..... 64
§. 15.—Aplicacion á un ejemplo de la doctrina expuesta en los párrafos anteriores..... 70
CAPÍTULO III.—Descomposicion, en trinomios reales de segundo grado, de la ecuacion cuyas raices son todas imaginarias..... 77
§. 16.—Condiciones que debe reunir el verdadero método de resolver el problema..... 77
§. 17.—Realízanse las condiciones expuestas en el párrafo precedente..... 78
§. 18.—Aplícanse las fórmulas generales del párrafo anterior á los casos primeros y más sencillos..... 84
§. 19.—Manera de proceder en la práctica..... 89
§. 20.—Aplícase la teoría al análisis de un ejemplo..... 92
CAPÍLULO IV.—Ampliacion de la teoría expuesta en el capítulo precedente al caso en que la ecuacion, de grado *par*, que se trata de resolver, contenga raices reales é imaginarias..... 100
§. 21.—Enúnciase de nuevo, y se resuelve en términos generales, el problema de los párrafos 16 y 17..... 100
§. 22.—Dificultades que pueden presentarse al descomponer una ecuacion en trinomios reales de segundo grado, cuando son asimismo reales sus binomios componentes de primero..... 105
§. 23.—Amplíase la regla de Newton, para la correccion de las raices aproximadas de una ecuacion numérica, á la correccion de los trinomios de segundo grado..... 110
§. 24.—Aplicacion de lo expuesto á la resolucion de un ejemplo..... 114
CAPÍTULO V.—Resolucion de la ecuacion numérica del grado 2 *n*, cuyas raices, reales é imaginarias, son desiguales, ó sensiblemente discrepantes unas de otras..... 120
§. 25.—Enunciado del problema y condiciones previas á su resolucion..... 120
§. 26.—Resolucion del problema en dos distintos supuestos, ambos muy amplios ó generales..... 122
§. 27.—Estudio de los casos excepcionales, no comprendidos en el párrafo anterior..... 129

Págs.

§. 28.—Ejemplos y síntesis del método..... 136
CAPÍTULO VI.—Exámen del caso excepcional en que la ecuacion numérica propuesta contenga dos ó más raices de cualquier especie, muy poco discrepantes unas de otras..... 148
§. 29.—Dificultad, no considerada hasta ahora, que puede presentarse en la resolucion de las ecuaciones numéricas. 148
§. 30.—Digresion importante, necesaria para salvar la dificultad propuesta en el párrafo precedente..... 149
§. 31.—Análisis del problema cuando son dos, tres ó más las raices iguales ó *casi* iguales que la ecuacion propuesta contiene..... 152
§. 32.—Extension del método de Newton al problema en este capítulo considerado..... 161
§. 33.—Aplicacion de la doctrina expuesta en los párrafos anteriores á la resolucion de un ejemplo..... 169
CAPÍTULO VII.—Aplicacion de las teorías expuestas en los capítulos precedentes á la resolucion de varios ejemplos..... 173
§. 34.—Necesidad ó conveniencia de este capítulo, complementario de los precedentes..... 173
§. 35.—Resolucion de una ecuacion de *séptimo grado*, con siete raices reales, comprendidas entre *cero* y la *unidad*.. 173
§. 36.—Resolucion de otra ecuacion, tambien de *séptimo grado*, con *tres* raices reales y *cuatro* imaginarias..... 179
§. 37.—Resolucion de otra ecuacion, del grado *séptimo* tambien, con *una* sola raiz real y *seis* imaginarias..... 184
§. 38.—Resolucion de una ecuacion de *cuarto grado*, con dos pares de raices imaginarias *casi iguales*..... 188
APÉNDICE.—**Notas y adiciones á la doctrina matemática, expuesta en los capítulos anteriores**..... 196
A.—Expresion de sen $n\varphi$ y de cos $n\varphi$ en funcion de sen φ ó de cos φ..... 196
B.—Sobre el método de aproximacion de Newton..... 210
C.—Sobre la determinacion de las raices imaginarias..... 228
C'.—Adicion á la nota precedente. Exposicion del método de Horner para hallar las raices reales de una ecuacion numérica..... 239